This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

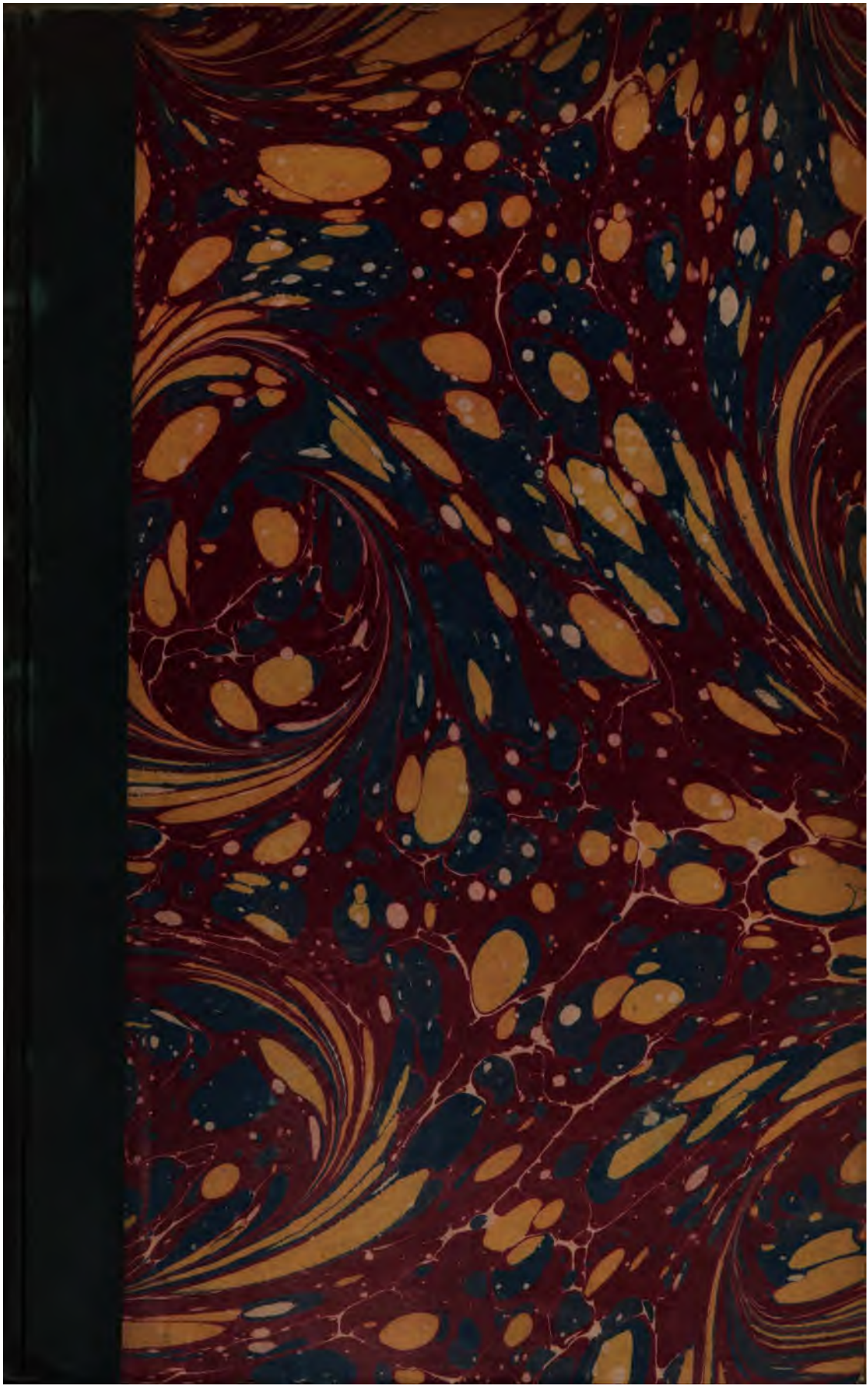
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРІЯ ЧИСЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ИЗЪ

ЛЕКЦІЙ

АДЪЮНКТА

Е. Яницкаго.

КАЗАНЬ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1860.

50

~~180. a. 72~~

181. a. 65.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Казанскаго университета, 1 сентября 1860 года.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЙ АНАЛИЗЪ.

ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ О ФУНКЦІЯХЪ И ИХЪ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

1. Въ математическомъ анализѣ разсматриваются вообще два рода величинъ: величины *постоянныя*, которыя или не измѣняютъ своего значенія вовсе, какъ напримѣръ численныя величины, или же сохраняютъ одно и тоже значеніе въ продолженіе извѣстнаго рода вычисленія, тогда какъ при другомъ вычисленіи онѣ могутъ принять другое опредѣленное значеніе; послѣднія называются собственно *произвольными постоянными*; другаго рода величины, разсматриваемыя въ математическомъ анализѣ, называются *перемѣнными* — онѣ и въ продолженіе одного вычисленія могутъ принимать рядъ различныхъ значеній. Постоянныя величины обыкновенно означаются первыми буквами алфавита, перемѣнныя — послѣдними. Между перемѣнными рѣзко различаются два рода величинъ: однѣ изъ нихъ могутъ измѣняться совершенно произвольно, безъ всякаго опредѣленнаго закона, другія же измѣняются только по извѣстному опредѣленному закону, или хотя и не поизвѣстному закону, но въ очевидной зависимости отъ измѣненія другихъ перемѣнныхъ; первыя называются *перемѣнными независимыми*, а вторыя ихъ *функціями*.

Прим. 1-й. Назовемъ T температуру мѣста, φ географическую широту его, t время; очевидно что температура T будетъ различна для различныхъ широтъ и для различнаго времени, слѣдовательно T есть функція φ и t; а какъ мы можемъ разсматривать температуру въ одной и той же широтѣ, но въ разное время, или въ разныхъ широтахъ, но

въ одно и тоже время, по произволу, то очевидно, что φ и t будутъ перемѣнныя независимыя. Хотя зависимость измѣненій температуры T отъ измѣненій широты φ и времени t очевидна, но законъ по которому измѣняется T съ измѣненіемъ φ и t неизвѣстенъ, такъ что по даннымъ φ и t мы не можемъ вычислить температуру T. Такого рода функціи мы можемъ называть *неопредѣленными*.

Прим. 2-е. Назовемъ V объемъ прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ, r радіусъ круга основанія, h высоту цилиндра; V очевидно будетъ измѣняться съ измѣненіемъ r и h и законъ этихъ измѣненій будетъ выражаться формулою

$$V = \pi r^2 . h,$$

по которой и можно вычислить V для всякаго даннаго значенія величинъ r и h; сверхъ того r и h мы можемъ измѣнять совершенно произвольно вмѣстѣ или порознь; слѣдовательно r и h будутъ независимыя перемѣнныя, V ихъ функція, которую мы можемъ назвать *опредѣленною*. Величина π, отношеніе окружности къ діаметру, будетъ постоянная.

2. Законъ измѣненія функцій вслѣдствіе измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ можетъ быть разнообразенъ до безконечности, поэтому и функціи бываютъ разнообразны до безконечности. Различнаго рода законъ зависимости измѣненій функціи отъ измѣненій независимыхъ перемѣнныхъ означается различнаго рода условными знаками. Такимъ образомъ если x и y, означаютъ независимыя перемѣнныя, z ихъ функцію, то одна опредѣленная зависимость z отъ y и x означается символическимъ знакомъ $z = F(x, y)$, другая зависимость должна быть означена уже иначе, напримѣръ $z = f(x, y)$, или $z = \varphi(x, y)$ и т. д. Вообще различнаго рода функціи отличаются одни отъ другихъ, при символическомъ ихъ означеніи, буквою стоящею предъ скобками, въ которыхъ написаны независимыя перемѣнныя.

Прим.

$$z = x^2 + axy + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = tg(x + ay + b^3), \quad z = x^m + ax^n + bx^p + cx^r + \ldots$$

и проч. Здѣсь z будетъ функція перемѣнныхъ x и y, или одной только перемѣнной x; a, b, c..... m, n, p..... величины постоянныя.

3. Во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ зависимость z отъ x и y была такова, что мы прямо видимъ какого рода дѣйствіе должно произвести надъ перемѣнными величинами для полученія ихъ функціи. Такого рода функціи называются *явными*. Но иногда законъ зависимости функцій отъ независимыхъ перемѣнныхъ дается подъ видомъ перѣшеннаго уравненія, которое должно быть предварительно рѣшено для того чтобы потомъ можно было приступить къ вычисленію функціи по данному значенію независимыхъ перемѣнныхъ. Такія функціи называются *неявными*. Пусть x и y означаютъ независимыя перемѣнныя, z ихъ неявная функція; тогда зависимость z отъ x и y выражается символическимъ уравненіемъ

$$f(x, y, z) = 0$$

или

$$\psi(x, y, z) = 0 \text{ и т. д.}$$

Прим.

$$y^2 + axy + x^2 = 0,$$

$$e^{mx}y - x = 0,$$

$$\operatorname{Sin}\frac{x+y}{2} - \operatorname{Log}\sqrt{ax + hy + cz} + axyz = 0,$$

и проч.

Изъ этихъ примѣровъ очевидно, что неявныя функціи могутъ переходить въ явныя, если рѣшимъ уравненіе которымъ связаны онѣ съ независимыми перемѣнными. Такъ изъ первыхъ двухъ уравненій получаемъ

$$y = x\left\{\frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\} \text{ и } y = \frac{lx}{mx},$$

гдѣ l означаетъ гиперболическій логарифмъ, котораго основаніе e. Здѣсь y становится явною функціею отъ x.

Неявныя функціи иногда опредѣляются нѣсколькими совмѣстными уравненіями; напримѣръ

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \text{ и } \psi(x, y, z, u) = 0.$$

Очевидно, что здѣсь двѣ только изъ величинъ x, y, z, u можно принимать за независимыя перемѣнныя, остальныя будутъ ихъ функціями, ибо приписавъ напр. x и y опредѣленныя значенія, мы можемъ предполагать, что z и u могутъ быть вычислены при помощи двухъ предыдущихъ уравненій, какъ совмѣстныхъ.

Прим.

$$xu + yv = pz$$
$$zu + tv = qz$$

принимая x, y, t за независимыя перемѣнныя мы можемъ, по даннымъ значеніямъ этихъ величинъ, найдти соотвѣтствующія значенія ихъ функцій u и v; а именно:

$$u = \frac{pzt - qzx}{tx - zy}, \qquad v = \frac{qx^2 - pz^2}{tx - zy}.$$

Иногда зависимость между перемѣнными и ихъ функціями бываетъ такъ сложна, что и рѣшеніе самыхъ уравненій выражающихъ эту зависимость бываетъ невозможно; во всякомъ случаѣ однакожъ зависимость измѣненій функціи отъ измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ очевидна, хотя законъ ихъ и не извѣстенъ, и слѣдовательно понятіе о функціяхъ не нарушается.

4. Если зависимость между перемѣнною величиной и ея функціею такова, что для каждаго значенія перемѣнной, функція получаетъ опредѣленное значеніе и при весьма маломъ измѣненіи перемѣнной измѣненія функціи также весьма малы и пропорціональны измѣненію перемѣнной, то такая функція называется *непрерывною*. Пусть $z = f(x)$; давая перемѣнной x два значенія a и $a + h$, гдѣ h величина неизмѣримо малая, для функціи z получимъ соотвѣтственныя значенія $f(a)$ и $f(a + h)$; функція z бу-

детъ непрерывною, если оба значія ея $f(a)$ и $f(a+h)$ будутъ для конечнаго значенія a, конечныя и опредѣленныя, и притомъ если разность $f(a+h)-f(a)$ будетъ неизмѣримо мала, когда h неизмѣримо мало. Напротивъ если, для извѣстнаго значенія перемѣнной, функція изъ дѣйствительной вдругъ переходитъ въ воображаемую или, при весьма маломъ измѣненіи перемѣнной, измѣняется на величину конечную или безконечно большую, то такая функція называется *прерывною*. Прерывы функціи могутъ быть только для извѣстныхъ значеній перемѣнной, тогда какъ для всѣхъ прочихъ она можетъ оставаться непрерывною.

Прим. 1-й

$$y = ax^2 + b, \quad y = \mathrm{Cos}\, x, \quad y = \mathrm{Sin}\, x \text{ и проч.}$$

Здѣсь y будетъ функція непрерывная перемѣнной x, потому что для опредѣленнаго значенія этой послѣдней, напримѣръ m, она получаетъ опредѣленныя дѣйствительныя значенія.

$$am^2 + b, \quad \mathrm{Cos}\, m, \quad \mathrm{Sin}\, m;$$

притомъ разности

$$a(m+h)^2 + b - \left\{am^2 + b\right\}, \mathrm{Cos}\,(m+h) - \mathrm{Cos}\, m,$$

$$\mathrm{Sin}\,(m+h) - \mathrm{Sin}\, m;$$

или

$$ah(2m+h), \; -2\,\mathrm{Sin}\left(m + \frac{h}{2}\right)\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2},$$

$$2\,\mathrm{Cos}\left(m + \frac{h}{2}\right)\mathrm{Sin}\,\frac{h}{2},$$

при весьма маломъ h, также весьма малы и изчезаютъ вмѣстѣ съ h для всякаго конечнаго значенія величины m.

Прим. 2-й.

$$y = tgx.$$

Очевидно, что эта функція остается непрерывною между границами для перемѣнной $x = 0$, и $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$, и т. д. ибо разность

между двумя послѣдовательными значеніями этой функціи, для послѣдовательныхъ значеній перемѣнной $x = a$, $x = a + h$, можетъ быть представлена такимъ образомъ

$$tg(a+h) - tg\,a = \left\{1 + tg(a+h)\,tg\,a\right\} tg\,h,$$

откуда очевидно, что разность эта будетъ безконечно мала, когда h безконечно мало, для всѣхъ значеній a, исключая тѣхъ, которыя близки къ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ...; когда значенія a близки къ этимъ величинамъ, то хотя h и безконечно мало, но разность $tg(a+h) - tg\,a$ можетъ быть величиною конечною или даже безконечно большою, въ слѣдствіе множителя $tg\,a$ во второй части предыдущаго равенства.

Прим. 3-й.

$$y = (x-2)\sqrt{x-3}.$$

Если x измѣняется отъ 0 до 2, функція y не имѣетъ дѣйствительнаго значенія, но если $x = 2$, то $y = 0$ — это первое дѣйствительное значеніе функціи, за которымъ она снова становится воображаемою до тѣхъ поръ пока $x > 2$ но < 3. Слѣдовательно прерывъ функціи y происходитъ въ то время, когда $x = 2$. Для всѣхъ значеній x большихъ 3 функція непрерывна, ибо разность между двумя послѣдовательными ея значеніями можетъ быть написана такимъ образомъ:

$$(a+h-2)\sqrt{a+h-3} - (a-2)\sqrt{a-3} = h\left\{\frac{3a-8}{2\sqrt{a-3}} + \ldots\ldots\right\},$$

откуда очевидно, что при h безконечно маломъ эта разность будетъ также безконечно мала, если $a > 3$.

СВОЙСТВА ЦѢЛЫХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

5. Если для полученія функціи надъ перемѣнной величиной должно произвести конечное число алгебраическихъ дѣйствій, разумѣя подъ этими послѣдними сложеніе, вычитаніе, умноженіе,

дѣленіе, возвышенія въ степени и извлеченіе радикаловъ, то такая функція называется *алгебраическою*. Если въ алгебраической функціи надъ перемѣнной величиной производится только дѣйствіе сложенія, вычитанія, умноженія и возвышенія въ цѣлыя и положительныя степени, то алгебраическая функція называется *цѣлою раціональною*. Самая высшая степень перемѣнной величины называется *степенью функціи*.

Мы займемся изслѣдованіемъ свойствъ этихъ послѣднихъ.

По самому опредѣленію очевидно, что общій видъ цѣлой раціональной функціи одной перемѣнной будетъ такой:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m = f(x), \qquad (1)$$

гдѣ m означаетъ цѣлое положительное и конечное число, $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$, какія угодно дѣйствительныя или воображаемыя величины, но не зависящія отъ x.

6. Предполагая эту функцію всегда расположенную по нисходящимъ степенямъ перемѣнной величины, докажемъ, что *для перемѣнной всегда можно выбрать такое значеніе, при которомъ одинъ изъ членовъ функціи будетъ больше суммы всѣхъ членовъ за нимъ слѣдующихъ*.

Назовемъ $p_r x^\mu$ одинъ изъ членовъ функціи $f(x)$, и докажемъ, что извѣстными значеніями x, всегда можно удовлетворить неравенству.

$$p_r x^\mu > p_{r+1} x^{\mu-1} + p_{r+2} x^{\mu-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m \qquad (2).$$

Пусть наибольшій изъ коефиціентовъ $p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots\ldots p_{m-1}, p_m$ будетъ p_s; взявъ этотъ коеффиціентъ со знакомъ + составимъ неравенство.

$$p_r x^\mu > p_s x^{\mu-1} + p_s x^{\mu-1} + \ldots\ldots + p_s x + p_s;$$

очевидно, если найдемъ значенія x удовлетворяющія этому не-

равенству, то неравенство предыдущее тѣмъ скорѣе будетъ удовлетворено. Но послѣднее неравенство можно написать еще такъ:

$$p_r x^{\mu} > p_s (x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + \ldots\ldots + x + 1)$$

или

$$p_r x^{\mu} > p_s \frac{x^{\mu} - 1}{x - 1},$$

а это неравинство очевидно будетъ удовлетворено, если для x найдемъ такую величину, которая удовлетворяетъ слѣдующему —

$$p_r x^{\mu} > p_s \frac{x^{\mu}}{x - 1},$$

или

$$p_r > p_s \frac{1}{x - 1}$$

для чего должно только брать

$$x > \frac{p_s + p_r}{p_r}.$$

И такъ, всегда можно найдти такія значенія для перемѣнной величины, при которыхъ членъ съ высшею ея степенью будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ функціи $f(x)$.

Точно также докажемъ, что *для перемѣнной можно выбрать такія значенія, при которыхъ одинъ изъ членовъ функціи* $f(x)$ *будетъ больше суммы всѣхъ членовъ ему предшествующихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, докажемъ, что можно найдти такія значенія, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{r-1} x^{\mu+1} < p_r x^{\mu} \qquad (3).$$

Назовемъ p_q численное значеніе самаго большаго изъ коефициентовъ $p_1, p_2, \ldots\ldots p_{r-1}$ и составимъ неравенство

$$p_q x^{\mu+1} (x^{m-\mu-1} + x^{m-\mu-2} + \ldots\ldots + x + 1) < p_r x^{\mu};$$

если найдемъ значенія x, удовлетворяющія послѣднему неравенству, то тѣмъ скорѣе будетъ удовлетворено неравенство (3). Но изъ послѣдняго мы получимъ:

$$p_q x \frac{1 - x^{m-\mu}}{1 - x} < p_r$$

откуда

$$x < \frac{p_r}{p_q + p_r}$$

И такъ, для всѣхъ значеній x меньшихъ или равныхъ дроби $\frac{p_r}{p_q + p_r}$, неравенство (3) будетъ удовлетворено. Отсюда слѣдуетъ, что *для перемѣнной величины въ функціи $f(x)$ всегда можно выбрать такія значенія, при которыхъ членъ съ низшею ея степенью будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ.*

Прим. 1-й. Данъ многочленъ

$$x^3 + x^2(3y - 4) + x(3y^2 - 8y + 2) + y^3 - 4y^2 + 2y + 1,$$

найдти такія значенія x, при которыхъ, для $y = 2$, членъ съ первою степенью x былъ бы больше суммы предыдущихъ членовъ.

Отв. $x \leqq \frac{1}{3}$.

Прим. 2-й. При такомъ же предположеніи относительно величины y, найдти для x такія значенія, при которыхъ членъ съ x^2 былъ бы больше всѣхъ слѣдующихъ членовъ.

Отв. $x \geqq \frac{4}{7}$.

7. Всякая функція, по самому опредѣленію своему, измѣняется вмѣстѣ съ измѣненіемъ независимой перемѣнной. Мы разсмотримъ, какимъ образомъ можетъ быть представлено измѣненіе цѣлой раціональной функціи, когда независимая перемѣнная получитъ какое нибудь произвольное приращеніе. Вставимъ въ функцію X, $x + h$

вмѣсто x, измѣненное значеніе функціи назовемъ $f(x+h)$; получимъ:

$$f(x+h) = (x+h)^m + p_1 (x+h)^{m-1} + p_2 (x+h)^{m-2} + \cdots + p_{m-1} (x+h) + p_m.$$

Но для всякаго цѣлаго и положительнаго m мы имѣетъ

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m_c{}^2 x^{m-2} h + \cdots + mxh^{m-1} + h^m;$$

а потому, собирая въ функціи $f(x+h)$ члены съ одинаковою степенью h, мы можемъ написать ее такимъ образомъ:

$$f(x+h) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m$$

$$+ \left\{ mx^{m-1} + p_1 (m-1) x^{m-2} + p_2 (m-2) x^{m-3} + \cdots + p_{m-1} \right\} h$$

$$+ \left\{ m(m-1) x^{m-2} + p_1 (m-1)(m-2) x^{m-3} + \cdots + 2 p_{m-2} \right\} \frac{h^2}{1.2}$$

$$+ \left\{ m(m-1)(m-2) x^{m-3} + p_1 (m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} \right.$$

$$\left. + \cdots 3.2.1. p_{m-3} \right\} \frac{h^3}{1.2.3.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{ m(m-1)(m-2) \cdots 2. x + p_1 (m-1) \cdots 2.1. \right\} \frac{h^{m-1}}{1.2.3 \ldots m-1}$$

$$+ m(m-1)(m-2) \cdots 2.1 \frac{h^m}{1.2.3.4 \ldots m}$$

Разсматривая видъ коеффиціентовъ при различныхъ степеняхъ h, $\frac{h^2}{1.2}$, $\frac{h^3}{1.2.3}$, $\cdots$ легко замѣтить, что каждый коеффиціентъ при этихъ степеняхъ составляется изъ коеффиціента предыдущаго члена точно такимъ же образомъ какимъ коеффиціентъ при первой степени h составленъ изъ функціи $f(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, во первыхъ замѣчаемъ, что членъ независящій отъ h въ предыдущей строкѣ

есть первоначальный видъ функціи $f(x)$; во вторыхъ коеффиціентъ при h получится изъ функціи X, если въ каждомъ ея членѣ коеффиціенты при различныхъ степеняхъ X помножимъ на соотвѣтствующіе показатели этой буквы, а самые показатели уменьшимъ еденицею и наконецъ отбросимъ членъ независящій отъ x; коеффиціентъ при $\frac{h^2}{1.2}$ совершенно по тому же закону составляется изъ коеффиціента при h, и т. д.

8. Вслѣдствіе этаго общаго закона составленія коеффиціентовъ при степеняхъ h, они и означаются по одному общему закону; такимъ образомъ: коеффиціентъ при первой степени h, непосредственно происходящій отъ функціи $f(x)$ называется *первою ея производною функціею*, и означается $f'(x)$; коеффиціентъ при $\frac{h^2}{1.2}$ называется первою производною отъ $f'(x)$ или *второю производною* отъ $f(x)$ и означается $f''(x)$ и т. д. Прозводная m-я или m-го порядка отъ $f(x)$ будетъ слѣдовательно величина постоянная и равна $m(m-1)\ldots..2.1$, а производная $m+1$-го порядка и слѣдующія будутъ равны нулю, потому что производная m-го порядка состоитъ только изъ одного члена съ нульпою степенью отъ x, и потому, вслѣдствіе общаго закона составленія производныхъ, слѣдующая производная необходимо равна нулю, для всякаго конечнаго значенія m. И такъ по обще-принятому означенію, функція $f(x+h)$ можетъ быть представлена такимъ образомъ

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots\ldots + h^m \qquad (4)$$

Эта строка, весьма замѣчательная въ анализѣ, носитъ названіе *строки Тейлора*, по имени изобрѣтателя; въ Дифференціальномъ исчисленіи доказываютъ ее для всѣхъ вообще функцій. Въ настоящее время мы воспользуемся этой строкой для доказательства нѣкоторыхъ свойствъ функцій цѣлыхъ раціональныхъ.

а) При помощи этой строки легко убѣдиться, что цѣлыя раціональныя функціи, для всякаго конечнаго значенія перемѣнной

величины, суть функціи непрерывныя. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе строки Тейлора, приращеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее приращенію h независимой перемѣнной, можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$f(x+h) - f(x) = h\,f(x)' + \overset{2}{h_c}\,f''(x) + \overset{3}{h_c}\,f'''(x) + \ldots + h^m \qquad (5)$$

Но, по доказанному нами, для h всегда можно выбрать такъ малую величину, что членъ съ первою его степенью, для всякаго конечнаго значенія перемѣнной x, будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ строки; тѣмъ скорѣе подобное неравенство будетъ имѣть мѣсто для h безконечно малаго, а какъ членъ съ первою степенью h становится безконечно малымъ, какъ скоро h безконечно мало, если только значенія независимой перемѣнной конечны, то отсюда и слѣдуетъ, что приращеніе функціи X представляемое разностью $f(x+h) - f(x)$ будетъ безконечно мало, если приращеніе независимой перемѣнной безконечно мало.

b) *Всякая цѣлая раціональная функція, при измѣненіи независимой перемѣнной не можетъ перейти изъ положительной въ отрицательную, или наоборотъ, не сдѣлавшись въ промежуткѣ равною нулю.*

Дѣйствительно въ (4) равенствѣ знакъ второй его части, при весьма маломъ h, зависитъ отъ перваго члена; а слѣдовательно, если при $x = a - h$, функція $f(x)$ положительна, а при $x = a + h$ отрицательна, и притомъ какъ бы h мало не было, то очевидно, что вторая часть равенства (4.) изъ положительной должна перейти въ отрицательную, когда x измѣняется отъ $a - h$ до $a + h$; или когда вмѣсто $-h$ поставимъ $+h$; а это возможно только тогда, когда членъ независящій отъ h будетъ равенъ нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что *если два какія нибудь значенія перемѣнной $x = a$ и $x = b$, доставляютъ функціи $f(x)$ значенія съ противными знаками, то между a и b найдется по крайней мѣрѣ одно значеніе $x = c$, которое приводитъ функцію $f(x)$ къ нулю.*

c) *До своего уничтоженія функція $f(x)$ имѣетъ знакъ противный съ своею первою производной, послѣ уничтоженія — одинакій.*

Пусть значеніе перемѣнной $x = a$ уничтожаетъ функцію $f(x)$, не измѣняя своего знака. Тогда значеніе функціи $f(x)$ до уничтоженія, для $x = a - h$ будетъ

$$f(a-h) = -hf'(a) + h_c^2 f''(a) - h_c^3 f'''(a) + \cdots\cdots,$$

а послѣ уничтоженія, для $x = a + h$,

$$f(a+h) = +hf'(a) + h_c^2 f''(a) + h_c^3 f'''(a) + \cdots\cdots$$

Откуда теорема становится очевидною.

9. Строка Тейлора даетъ намъ возможность узнать, будетъ ли функція возрастать вмѣстѣ съ увеличеніемъ перемѣннаго и уменьшаться съ его уменьшеніемъ, или, наоборотъ, — она будетъ уменьшаться, когда перемѣнное увеличивается, и увеличивается, когда оно уменьшается.

Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія (5) очевидно, что при h положительномъ, и весьма маломъ, разность $f(x+h) - f(x) > 0$, если $f'(x) > 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$, если $f'(x) < 0$, ибо первый членъ второй части этаго уравненія, для h весьма малаго, будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ, и слѣдовательно знакъ разности $f(x+h) - f(x)$ зависитъ отъ знака $hf'(x)$. Обратныя получимъ заключенія, если $h < 0$, тогда очевидно разность $f(x+h) - f(x) > 0$, если $f'(x) < 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$, если $f'(x) > 0$.

И такъ вообще, *функція будетъ возрастать вмѣстѣ съ увеличеніемъ перемѣннаго, начиная отъ извѣстнаго его значенія и уменьшаться съ его уменьшеніемъ, если первая производная этой функціи, для разсматриваемаго значенія перемѣнной, будетъ положительна.* На оборотъ *функція будетъ уменьшаться, когда перемѣнное увеличивается, и увеличиваться, когда перемѣнное уменьшается,—если первая производная отрицательна.*

10. Отсюда выходитъ весьма интересное слѣдствіе: *когда*

значеніе перемѣнной $x = a$ доставляетъ функціи $f(x)$ наибольшее или наименьшее изъ всѣхъ сосѣднихъ значеній, то значеніе $x = a$ приводитъ въ тоже время первую производную функцію $f'(x)$ къ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, когда при переходѣ перемѣнной отъ одного значенія $x = \mu$ до другаго $x = \gamma$, функція $f(x)$ достигаетъ въ промежуткѣ своего наибольшаго значенія, то она изъ возрастающей должна сдѣлаться убывающею; а вслѣдствіе предыдущаго, первая ея производная $f'(x)$ должна изъ положительной перейдти въ отрицательную, и слѣдовательно для того значенія перемѣнной, $x = a$, для котораго функція $f(x)$ достигаетъ наибольшаго значенія, она дѣлается равною нулю. Къ тому же заключенію придемъ, когда $x = a$ доставляетъ функціи $f(x)$ наименьшее значеніе.

О КОРНЯХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

11. Всякое значеніе перемѣнной величины, какого бы оно вида не было, но которое приводитъ цѣлую раціональную функцію $f(x)$ тождественно къ нулю, называется *корнемъ* этой функціи. И такъ корни цѣлой раціональной функціи суть значенія x, удовлетворяющія алгебраическому уравненію.

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (6).$$

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что всѣ алгебраическія уравненія второй, третьей и четвертой степени имѣютъ корни вида $a + b\sqrt{-1}$, и что число такихъ корней равняется показателю степени уравненія; докажемъ эту теорему въ самомъ общемъ видѣ:

Всякой цѣлой раціональной функціи, какой бы степени она не была, необходимо принадлежитъ корень вида $a + b\sqrt{-1}$, гдѣ a и b числа дѣйствительныя.

Означимъ

$$f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + p_{m-1} x + p_m,$$

и предположимъ, для большей общности, что коэффиціенты этой функціи $p_1, p_2, \ldots p_m$ могутъ быть и дѣйствительные и воображаемые. По свойству воображаемыхъ выраженій, всѣ дѣйствія производимыя надъ ними приводятъ къ выраженіямъ такого же вида; а слѣдовательно, если въ функцію $f(x)$ поставимъ, вмѣсто x, выраженіе $a + b\sqrt{-1}$, то получимъ:

$$f(a + b\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1} \quad (*)$$

(*) Въ этомъ легко убѣдиться такимъ образомъ. По формулѣ (4) которая справедлива для всякаго h, мы имѣемъ

$$f(a + b\sqrt{-1}) = f(a) + b\sqrt{-1}\,f'(a) + \frac{(b\sqrt{-1})^2}{c} f''(a) + \ldots\ldots + (b\sqrt{-1})^m.$$

Но, когда

$$p_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1},\ p_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1},\ \ldots\ldots\ p_m = \alpha_m + \beta_m\sqrt{-1},$$

то очевидно:

$$f(a) = a^m + (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1})a^{m-1} + (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1})\,a^{m-2} + \ldots\ldots + (\alpha_m + \beta_m\sqrt{-1}) = P_0 + Q_0\sqrt{-1},$$

$$f'(a) = ma^{m-1} + (m-1)(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1})\,a^{m-2} + \ldots\ldots + (\alpha_{m-1} + \beta_{m-1}\sqrt{-1}) = P_1 + Q_1\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

А потому, называя

$$P_0 - b\,Q_1 - \frac{b^2}{c}P_2 + \frac{b^3}{c}Q_3 + \frac{b^4}{c}P_4 - \ldots\ldots = M,$$

$$Q_0 + b\,P_1 - \frac{b^2}{c}Q_2 - \frac{b^3}{c}P_3 + \frac{b^4}{c}Q_4 + \ldots\ldots = N,$$

получимъ:

$$f(a + b\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1}.$$

гдѣ M и N означаютъ цѣлыя раціональныя функціи величинъ a и b, которыя мы означимъ $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$.

Очевидно, если докажемъ, что существуютъ такія значенія величинъ a и b, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\varphi(a, b) = 0, \quad \psi(a, b) = 0,$$

или уравненію

$$[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2 = 0,$$

котораго первая часть представляетъ квадратъ модуля воображаемаго выраженія $M + N\sqrt{-1}$, то мы докажемъ, что цѣлой раціональной функціи принадлежитъ корень вида $a + b\sqrt{-1}$.

Но, разсматривая этотъ квадратъ модуля, мы видимъ, что онъ, измѣняясь вмѣстѣ съ измѣненіемъ величинъ a и b, постоянно остается положительнымъ, какъ составленный изъ суммы квадратовъ дѣйствительныхъ величинъ; а слѣдовательно онъ можетъ возрастать до какой угодно большой величины, но уменьшаться можетъ только до опредѣленной положительной величины, или до нуля. И такъ, *измѣняя a и b, всегда можно достигнуть такихъ значеній $a = p$, $b = q$, которыя доставляютъ квадрату модуля*

$$R^2 = [\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2$$

наименьшее значеніе.

12. Докажемъ, что это наименьшее значеніе есть нуль; т. е. что выраженіе

$$x_1 = p + q\sqrt{-1},$$

съ дѣйствительными величинами p и q, удовлетворяетъ уравненію

$$f(x) = 0.$$

Допустимъ, что наименьшее значеніе квадрата модуля

$$R_1^2 = [\varphi(p, q)]^2 + [\psi(p, q)]^2$$

не равно нулю. Ставимъ въ функцію $f(x)$ $x_1 + \varepsilon u$ вмѣсто x, гдѣ ε величина весьма малая, и u величина, которою мы можемъ распо-

лагать по произволу, и вычислимъ модуль воображаемаго выраженія $f(x_1 + \varepsilon u)$. По формулѣ (4) имѣемъ:

$$f(x_1 + \varepsilon u) = f(x_1) + \varepsilon u f'(x_1) + (\varepsilon u)_c^2 f''(x_1) + \ldots\ldots + (\varepsilon u)_c^m$$

Во второй части этаго равенства функція $f(x_1)$, по нашему предположенію, не уничтожается, но нѣкоторыя изъ ея производныхъ могутъ уничтожиться, и предположимъ, что первая неуничтожающаяся будетъ $f^{(n)}(x_1)$. Тогда получимъ:

$$f(x_1 + \varepsilon u) = f(x_1) + (\varepsilon u)_c^n f^{(n)}(x_1) + (\varepsilon u)_c^{n+1} f^{(n+1}(x_1) + \ldots\ldots + (\varepsilon u)^m \quad (a)$$

Означая

$$f(x_1) = P + Q\sqrt{-1},$$

$$f^{(n)}(x_1) = P_1 + Q_1\sqrt{-1},$$

$$f^{(n+1)}(x_1) = P_2 + Q_2\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

получимъ

$$f(x_1 + \varepsilon u) = P + P_1 (\varepsilon u)_c^n + P_2 (\varepsilon u)_c^{n+1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ Q + Q_1 (\varepsilon u)_c^n + Q_2 (\varepsilon u)_c^{n-1} + \ldots\ldots\ldots \right\} \sqrt{-1};$$

квадратъ модуля этаго воображаемаго выраженія будетъ:

$$R^2 = \left\{ P + P_1 (\varepsilon u)_c^n + P_2 (\varepsilon u)_c^{n+1} + \ldots\ldots \right\}^2 + \left\{ Q + Q_1 (\varepsilon u)_c^n + Q_2 (\varepsilon u)_c^{n+1} + \ldots\ldots \right\}^2$$

$$= P^2 + Q^2 + 2 (PP_1 + QQ_1) (\varepsilon u)_c^n + \ldots\ldots\ldots$$

$$= R_1^2 + 2 (PP_1 + QQ_1) (\varepsilon u)_c^n + \ldots\ldots\ldots$$

Величину ε здѣсь мы можемъ выбрать такъ малою, что знакъ всей суммы

$$2 (PP_1 + QQ_1) (\varepsilon u)_c^n + \ldots\ldots\ldots$$

будетъ зависѣть отъ знака перваго ея члена, и какъ величиною u

мы можемъ располагать по произволу, то всегда можно выбрать ее такимъ образомъ, что членъ

$$2\,(PP_1 + QQ_1)\,(\varepsilon u)_c^n$$

будетъ отрицателенъ. Въ самомъ дѣлѣ, для удовлетворенія этому условію должно, напримѣръ, принять $u^n = -1$, или $PP_1 + QQ_1 > 0$ и $u^n = +1$, если $PP_1 + QQ_1 < 0$. Съ другой стороны, изъ уравненія $u^n = \pm 1$ всегда можно найдти значенія u вида $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; а слѣдовательно *для a и b всегда можно найдти дѣйствительныя значенія, $p + \varepsilon\alpha$ и $q + \varepsilon\beta$, для которыхъ значеніе модуля R будетъ меньше R_1.*

13. Очевидно заключеніе это не будетъ имѣть мѣста въ томъ случаѣ, когда

$$PP_1 + QQ_1 = 0.$$

Но въ этомъ случаѣ, вмѣсто u^n, въ уравненіе (a) поставимъ $\theta\sqrt{-1}$, гдѣ $\theta = \pm 1$; тогда, при тѣхъ же означеніяхъ, получимъ

$$f(x + \varepsilon u) = \left\{P - Q_1\,\varepsilon_c^n\theta + \ldots\ldots\right\} + \left\{Q + P_1\,\varepsilon_c^n\theta + \ldots\ldots\right\}\sqrt{-1}.$$

Квадратъ модуля этаго воображаемаго выраженія будетъ

$$R'^2 = R_1^2 + 2\,(P_1Q - Q_1P)\,\theta\,\varepsilon_c^n + \ldots\ldots$$

Откуда, подобно предыдущему, легко заключить, что R' всегда можно сдѣлать меньше R_1, если примемъ $\theta = -1$, когда $P_1Q - Q_1P > 0$ и $\theta = +1$, когда $P_1Q - Q_1P < 0$.

14. Вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$PP_1 + QQ_1 = 0$$

нельзя допустить уравненія

$$P_1Q - Q_1P = 0,$$

потому что, разсматривая ихъ совмѣстными, легко придти къ заключенію, что для удовлетворенія ихъ необходимо принять, или $P=0$ и $Q=0$ или $P_1=0$ и $Q_1=0$, что противорѣчитъ предположенію.

15. И такъ если мы примемъ, что наименьшее значеніе модуля R_1 не равно нулю, то какъ бы мы его малымъ не предположили, всегда для a и b въ функціяхъ $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$ можно выбрать такія значенія, при которыхъ новый модуль будетъ меньше R_1. А слѣдовательно наименьшее значеніе модуля воображаемаго выраженія

$$f(a+b\sqrt{-1})$$

есть нуль. Съ другой стороны, какъ это наименьшее значеніе модуля необходимо существуетъ, то мы и должны заключить, что для всякой цѣлой раціональной функціи $f(x)$ существуетъ такое значеніе перемѣнной $x=p+q\sqrt{-1}$, которое приводитъ ее къ нулю.

Эту, весьма важную въ анализѣ, теорему въ первый разъ удовлетворительно доказалъ *Коши* (Cauchy), котораго способъ мы здѣсь и изложили.

16. **Если цѣлая раціональная функція**

$$f(x)=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots\ldots+p_{m-1}x+p_m$$

имѣетъ всѣ коеффиціенты p_1, p_2, $\ldots\ldots$ p_m числа дѣйствительныя и если ей принадлежитъ корень вида $a+b\sqrt{-1}$, въ которомъ b не нуль, то ей необходимо принадлежитъ также сопряженный корень $a-b\sqrt{-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, поставивъ въ функцію $f(x)$ $a+b\sqrt{-1}$, вмѣсто x, мы получимъ

$$f(a+b\sqrt{-1})=f(a)+b\sqrt{-1}\,f'(a)+(b\sqrt{-1})^2f''(a)+\ldots\ldots+(b\sqrt{-1})^m$$

Полагая здѣсь для краткости

$$f(a) - \frac{f'(a)}{1.2.} + \frac{f''(a)}{1.2.3.4} - \ldots\ldots = P,$$

$$f'(a) - \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \frac{f^{IV}(a)}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots = Q,$$

вслѣдствіе опредѣленія корня, мы получимъ тождественно

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

или

$$P = 0 \qquad Q = 0$$

Съ другой стороны, вставка вмѣсто x въ функцію $f(x)$ воображаемаго выраженія $a - b\sqrt{-1}$ даетъ:

$$f(a - b\sqrt{-1}) = P - Q\sqrt{-1},$$

что также тождественно равно нулю, ибо здѣсь P и Q сохраняютъ прежнія значенія.

Теорема эта очевидно не будетъ имѣть мѣста, если нѣкоторые изъ коеффиціентовъ p_1, p_2 .... p_m будутъ числа воображаемыя, ибо тогда вставка сопряженнаго выраженія $a - b\sqrt{-1}$ можетъ привести къ другимъ значеніямъ P и Q.

17. *Каковъ бы не былъ корень α цѣлой раціональной функціи $f(x)$, она необходимо дѣлится нацѣло на разность $x - \alpha$.*

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣляя функцію $f(x)$ на $x - \alpha$, мы можемъ продолжать дѣленіе до тѣхъ поръ, пока получимъ въ остаткѣ величину независящую отъ x; назовемъ этотъ остатокъ R, а частное дѣленія Q. Тогда получимъ:

$$f(x) = Q(x - \alpha) + R.$$

Это уравненіе справедливо для всякаго x, а потому, полагая въ немъ $x = \alpha$, мы будемъ имѣть:

$$f(\alpha) = R;$$

Откуда видимъ, что остатокъ R есть результатъ вставки вели-

чины α, вмѣсто x, въ функцію $f(x)$, а этотъ результатъ тождественно равенъ нулю, по самому опредѣленію корня α.

18. На основаніи предыдущей теоремы весьма легко доказать, что *всякой цѣлой раціональной функціи принадлежитъ столько корней, сколько въ показатель ея степени единицъ.*

Пусть α будетъ корень функціи $f(x)$; результатъ дѣленія $f(x)$ на $x-\alpha$ назовемъ $f_1(x)$; получимъ

$$f(x) = f_1(x)\,(x-\alpha),$$

здѣсь $f_1(x)$ будетъ цѣлая раціональная функція перемѣннаго x, только степень ея одною единицею ниже степени $f(x)$; а слѣдовательно ей, въ свою очередь, принадлежитъ необходимо корень вида $a+b\sqrt{-1}$, который мы назовемъ β. На основаніи предыдущей теоремы мы будемъ имѣть

$$f_1(x) = (x-\beta)\,f_2(x),$$

гдѣ $f_2(x)$ означаетъ цѣлую же раціональную функцію, степень которой одною единицею ниже степени $f_1(x)$. Подобнымъ образомъ получимъ

$$f_2(x) = (x-\gamma)\,f_3(x),$$

$$f_3(x) = (x-\delta)\,f_4(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и наконецъ, предполагая, какъ и всегда, что коэффиціентъ при высшей степени перемѣннаго единица,

$$f_{m-2}(x) = (x-\eta)\,f_{m-1}(x),$$

$$f_{m-1}(x) = (x-\zeta).$$

Перемножая всѣ эти уравненія, получимъ:

$$f(x) = (x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\cdots\cdots(x-\eta)\,(x-\zeta). \qquad (7).$$

Во второй части этаго равенства m множителей, съ уничтоженіемъ каждаго изъ нихъ уничтожается и все произведеніе; а по-

тому, полагая въ этомъ равенствѣ $x = \alpha$, потомъ $x = \beta$, $x = \gamma$, ..., $x = \zeta$ мы получимъ тождественныя уравненія

$$f(\alpha) = 0,\ f(\beta) = 0,\ f(\gamma) = 0,\ \ldots\ldots\ f(\zeta) = 0;$$

то есть всѣ m величинъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ \zeta$ будутъ корнями функціи $f(x)$.

19. Свойство цѣлой раціональной функціи

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-1} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m = f(x)$$

разлагаться на линейные множители $x - \alpha$, $x - \beta$, ... открываетъ намъ замѣчательную зависимость между коеффиціентами p_1, p_2, p_3, ... p_m и корнями α, β, γ ..... ζ,

Въ самомъ дѣлѣ, если во второй части равенства

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\eta)(x-\zeta)$$

развернемъ произведеніе и расположимъ его по степенямъ x, то, изъ сравненія коеффиціентовъ при одинакихъ степеняхъ x, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots + \eta + \zeta) \\
p_2 &= +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots + \alpha\zeta + \beta\gamma + \ldots\ldots + \eta\zeta) \\
p_3 &= -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \ldots\ldots + \alpha\beta\zeta + \beta\gamma\delta + \ldots\ldots) \\
p_4 &= +(\alpha\beta\gamma\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_m &= \pm\, \alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \eta\zeta
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

т. е. коеффиціентъ при x^{m-1} равенъ суммѣ всѣхъ корней взятой съ знакомъ противнымъ, коеффиціентъ при x^{m-2} — суммѣ различныхъ произведеній изъ всѣхъ корней по два, коеффиціентъ при x^{m-3} — суммѣ различныхъ произведеній изъ всѣхъ корней по три, взятой съ знакомъ противнымъ и т. д., наконецъ членъ, независящій отъ x, равенъ произведенію всѣхъ корней взятому съ тѣмъ же знакомъ, если m число четное и съ знакомъ противнымъ, если m число нечетное.

20. Чтобъ доказать справедливость этаго закона для всякаго цѣлаго положительнаго m, допустимъ, что онъ справедливъ для ка-

кого нибудь значенія m и докажемъ, что онъ останется также справедливъ и для $m+1$.

Съ этою цѣлью къ функціи

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m ,$$

состоящей изъ m множителей, прибавимъ еще одного $x - l$; тогда получимъ цѣлую раціональную функцію $m+1$-й степени:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x^{m+1} + p_1 & x^m + p_2 & x^{m-1} + p_3 & x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} & x^2 + p_m & x - p_m l. \\ -l & -p_1 l & -p_2 l & -p_{m-2} l & -p_{m-1} l & \end{array}$$

Допустивъ теперь справедливость закона, выраженнаго равенствами (8) для функцій m-ой степени и назвавъ коеффиціенты функціи $m+1$ степени буквами $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_{m+1}$, мы, очевидно, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - l \quad = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots + l) \\ P_2 &= p_2 - l p_1 = +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots + \eta\zeta + \alpha l + \beta l + \ldots\ldots + \zeta l) \\ P_3 &= p_3 - l p_2 = -(\alpha\beta\gamma + \ldots\ldots + \alpha\beta l + \ldots\ldots + \eta\zeta l) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{m+1} &= -p_m l = \mp \alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \eta\zeta l. \end{aligned}$$

Откуда ясно, что законъ составленія коеффиціентовъ изъ корней остается справедливъ и для функцій $m+1$-й степени. Съ другой стороны, мы знаемъ, что законъ этотъ справедливъ для функцій второй степени, а слѣдовательно онъ будетъ справедливъ и для функцій третьей степени, откуда заключаемъ о справедливости его для функцій 4-й степени и т. д.

свойства цѣлой раціональной функціи относительно равныхъ корней. отдѣленіе равныхъ корней.

21. Мы видѣли, что всякая цѣлая раціональная функція $f(x)$ можетъ быть разложена на столько линейныхъ множителей, сколько въ показатель ея степени еденицъ (*уравн.* 7); а слѣдовательно,

если функція $f(x)$ имѣетъ нѣсколько корней равныхъ между собою, напр. a корней равныхъ α, b корней равныхъ β, c корней равныхъ γ и т. д., и наконецъ l корней равныхъ λ (*), то ее можно представить такимъ образомъ:

$$f(x) = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\lambda)^l \varphi_n(x), \qquad (1)$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ функцію n-й степени, содержащую неравные корни; притомъ $a+b+c+\ldots\ldots+l+n=m$. Беремъ гиперболическій логарифмъ обѣихъ частей предыдущаго равенства; мы получимъ:

$$lf(x) = a\,l(x-\alpha) + b\,l(x-\beta) + c\,l(x-\gamma) + \ldots\ldots + ll(x-\lambda) + l\varphi_n(x);$$

откуда, по дифференцированіи, находимъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma} + \ldots\ldots + \frac{l}{x-\lambda} + \frac{\varphi'_n(x)}{\varphi_n(x)}.$$

Помножая обѣ части на $f(x)$ и замѣняя эту функцію произведеніемъ (1), получимъ

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & a(x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\lambda)^l \varphi_n(x) \\ & + b(x-\alpha)^a (x-\beta)^{b-1}(x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\lambda)^l \varphi_n(x) \\ & + c(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^{c-1} \ldots\ldots (x-\lambda)^l \varphi_n(x) \\ & + \ldots\ldots + l(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\lambda)^{l-1} \varphi'_n(x) \\ & + (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\lambda)^l \varphi'_n(x), \end{aligned}$$

или

$$f'(x) = (x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^{b-1}(x-\gamma)^{c-1} \ldots\ldots (x-\lambda)^{l-1} \psi(x), \qquad (2)$$

гдѣ $\psi(x)$ означаетъ сумму членовъ, не имѣющихъ уже общаго множителя, какъ это очевидно изъ предыдущаго уравненія. Изъ этаго слѣдуетъ:

1-е. *Если цѣлая раціональная функція $f(x)$ имѣетъ a корней равныхъ α, b корней равныхъ β, c корней равныхъ γ и т. д. и наконецъ l корней равныхъ λ, то ея первая производная $f'(x)$ будетъ*

(*) Это значитъ, что нѣкоторыя изъ функцій $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots\ldots$ $f_{m-1}(x)$ (*см. ур. 7 и предыдущія*) уничтожаются для однѣхъ и тѣхъ же значеній x.

имѣть $a-1$ корней равныхъ α, $b-1$ корней равныхъ β, $c-1$ корней равныхъ γ и т. д. и наконецъ $l-1$ корней равныхъ λ; притомъ корни равные α будутъ принадлежать и всѣмъ производнымъ $f'(x)$, $f''(x)$, ... до производной $f^{(a-1)}$ включительно; подобнымъ образомъ корни равные β будутъ принадлежать всѣмъ производнымъ $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... до производной $f^{b-1}(x)$ и т. д.

2-е. *Въ случаѣ равныхъ корней, данная функція $f(x)$ имѣетъ съ своею первою производной общаго наибольшаго дѣлителя D, который равенъ*

$$(x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^{c-1} \ldots\ldots (x-\lambda)^{l-1}.$$

22. На основаніи этихъ двухъ теоремъ, легко узнать допускаетъ ли данное алгебраическое уравненіе равные корни и если допускаетъ, то вычислить ихъ отдѣльно, разбивая это уравненіе на два или нѣсколько другихъ степени низшей.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что алгебраическое уравненіе m-ой степени

$$f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

имѣетъ a корней равныхъ α, b корней равныхъ β, c корней равныхъ γ и т. д. и наконецъ n корней равныхъ l, тогда первую часть этаго корня мы можемъ написать такимъ образомъ:

$$f(x) = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-l)^n \varphi(x)$$

Первая производная этой функціи и общій наибольшій дѣлитель между нею и начальною, какъ мы видѣли, будутъ

$$f'(x) = (x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^{b-1}(x-\gamma)^{c-1} \ldots\ldots (x-l)^{n-1}\psi(x),$$

$$D = (x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^{b-1}(x-\gamma)^{c-1} \ldots\ldots (x-l)^{n-1}.$$

А слѣдовательно, если уравненіе $f(x)=0$ допускаетъ равные или кратные корни, то между $f(x)$ и ея первою производною долженъ существовать общій наибольшій дѣлитель раціональная функція

отъ x, который, по общимъ алгебраическимъ правиламъ, легко можетъ быть найденъ. Отыскавъ этаго общаго дѣлителя D, и раздѣляя на него данную функцію $f(x)$, мы получимъ

$$\frac{f(x)}{D} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots(x-l)\,\varphi_n(x) = \theta(x)$$

$\theta(x)$ будетъ содержать всѣ множители $x-\alpha$, $x-\beta$, ..., въ первой степени и слѣдовательно уже не будетъ содержать кратныхъ корней. Разсматривая функціи $\theta(x)$ и D видимъ, что и между ними есть общій дѣлитель

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots(x-l) = \chi(x),$$

который содержитъ всѣ множители функціи $f(x)$, дающіе кратные корни, но только въ первой степени. Раздѣляя $\theta(x)$ на $\chi(x)$, мы получимъ

$$\frac{\theta(x)}{\chi(x)} = \varphi(x);$$

функція $\varphi(x)$ содержитъ всѣ неравные корни функціи $f(x)$. И такъ въ случаѣ равныхъ корней, уравненіе (1) можетъ быть разбито на два другихъ

$$\chi(x) = 0, \qquad \varphi(x) = 0, \qquad (3)$$

изъ которыхъ первое даетъ всѣ кратные, а второе всѣ остальные корни функціи $f(x)$, и притомъ степень этихъ уравненій значительно ниже степени даннаго.

23. Предыдущій способъ даетъ, сверхъ того, возможность вычислить всѣ кратные корни отдѣльно. Возмемъ частный примѣръ, отъ котораго легко будетъ перейдти и къ общему; предположимъ, что уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ два корня равныхъ α, 4 корня равныхъ β, 3 корня равныхъ γ; остальные корни всѣ неравные между собою; тогда

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^4(x-\gamma)^3\varphi(x)$$

$$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^3(x-\gamma)^2\psi(x),$$

$$D = (x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^3,$$
$$\theta(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\varphi(x),$$
$$\chi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Разсматривая функцію D, видимъ что для нее корень α простой, β и γ кратные, а слѣдовательно эти кратные корни можно отдѣлить отъ функціи D, поступая съ нею также, какъ поступали съ функціею $f(x)$. И такъ беремъ производную отъ D; она будетъ

$$D' = (x-\beta)^2(x-\gamma)M;$$

ищемъ общаго дѣлителя между D и D'; мы найдемъ

$$D_1 = (x-\beta)^2(x-\gamma),$$

а раздѣляя D на D_1 получимъ:

$$\theta_1(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Отыскивая общаго дѣлителя между $\theta_1(x)$ и D_1, найдемъ:

$$\chi_1(x) = (x-\beta)(x-\gamma)$$

и наконецъ раздѣляя $\theta_1(x)$ на $\chi_1(x)$, получимъ въ частномъ множитель $x-\alpha$, который уравнивая нулю, вычислимъ двойной корень α. Подобнымъ же образомъ можно отдѣлить и тройные и четверные корни и т. д. Замѣтимъ, что если бы уравненіе $f(x)=0$ имѣло не одинъ, а нѣсколько двойныхъ корней напр. три, то, употребляя предыдущей способъ, при дѣленіи $\theta_1(x)$ на $\chi_1(x)$ мы получили бы въ частномъ, не линейный множитель $(x-\alpha)$, а функцію третьей степени въ отношеніи x, которую уравнивая нулю, нашли бы три двойныхъ корня. Тоже самое замѣчаніе должно сдѣлать и о корняхъ тройныхъ, четверныхъ и т. д.

И такъ, когда уравненіе (1) содержитъ кратные корни, то ихъ всегда можно отдѣлить помощію простаго дѣленія и вычи-

слять порознь, а слѣдовательно въ этомъ случаѣ данное уравненіе можетъ быть разбито на нѣсколько другихъ, со степенями низшими.

Прим. 1-й. Найдти кратные корни уравненія

$$x^7 + 2x^6 - 19x^5 - 25x^4 + 346x^3 - 1201x^2 + 540x - 108 = 0.$$

Отв. Оно имѣетъ одинъ двойной корень $x = 2$ и одинъ тройной $x = -3$, прочіе корни неравные между собою.

Прим. 2-й. Найдти кратные корни уравненія

$$x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x - 1 = 0.$$

Отв. Уравненіе это имѣетъ три корня равныхъ 0,61803 ..... и три равныхъ $-1,61803$ .....

Прим. 3-й Найдти кратные корни уравненія

$$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32 = 0.$$

Отв. Оно имѣетъ три корня равныхъ 2 и одинъ равный 4.

ТЕОРІЯ ИЗБЫТКОВЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ДРОБЕЙ.

24. Если раціональная алгебраическая дробь $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, которой какъ числитель такъ и знаменатель представляютъ цѣлыя раціональныя функціи перемѣнной x, измѣняетъ знакъ при переходѣ чрезъ безконечное значеніе, то она можетъ переходить изъ отрицательной величины въ положительную, или изъ положительной въ отрицательную. Пусть перемѣнное x переходитъ рядомъ всѣхъ дѣйствительныхъ значеній отъ x_0 до X и предположимъ, что функція $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ при этомъ измѣненіи, переходя чрезъ безконечное значеніе n разъ изъ отрицательной величины переходитъ въ положительную и n' разъ изъ положительной величины въ отрицательную. Разность $n - n'$ называется *избыткомъ* раціональной функціи $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ между границами x_0 и X; означимъ его буквою E. Разсмо-

тѣніе этихъ избытковъ приведетъ насъ къ весьма изящному доказательству многихъ теоремъ, которыя служатъ основаніемъ наиболѣе употребительнымъ способамъ для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій.

1) Изъ самаго опредѣленія избытка видно, что если функція $\varphi(x)$, въ границахъ перемѣннаго x_0 и X, не имѣетъ дѣйствительныхъ корней, то избытокъ функціи $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ будетъ равенъ нулю, потому что существованіе избытка предполагаетъ переходъ функціи чрезъ безконечное значеніе, а это можетъ быть только тогда, когда уничтожается знаменатель этой функціи. Избытокъ E будетъ также нулемъ, если $\varphi(x)$ дѣлитъ нацѣло $\varphi_1(x)$, потому что тогда получится цѣлая функція, которая не можетъ сдѣлаться безконечною для конечныхъ значеній перемѣнной.

2) Если функція $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, при измѣненіи перемѣннаго между границами x_0 и X, переходя чрезъ безконечное значеніе, постоянно изъ положительной дѣлается отрицательною или наоборотъ, то одно изъ чиселъ n или n' будетъ нулемъ. Въ первомъ случаѣ $E = -n'$, во второмъ $E = n$.

3) Двѣ функціи $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ и $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, отличающіяся между собою только знаками, имѣютъ избытки равные, но съ противными знаками. Въ самомъ дѣлѣ, обѣ эти функціи переходятъ чрезъ безконечное значеніе въ одно и тоже время и притомъ, когда первая переходитъ изъ отрицательной величины въ положительную, вторая перейдетъ изъ положительной величины въ отрицательную и наоборотъ. Слѣдовательно, если $E = n - n'$ есть избытокъ первой функціи между границати x_0 и X, то E', избытокъ второй функціи, будетъ $= n' - n = -(n - n') = -E$.

4) Назовемъ избыткомъ двухъ дробей $\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, обратныхъ одна въ отношеніи другой, буквами E и E_1 и предположимъ, что

избытки эти относятся къ границамъ x_0 и X. Замѣчаемъ во первыхъ, что функціи $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, при измѣненіи перемѣннаго, всегда будутъ имѣть одинаковый знакъ, а слѣдовательно онѣ будутъ переходить изъ положительныхъ въ отрицательныя или наоборотъ всегда въ одно время. Сверхъ того, когда функція вторая дѣлается безконечною, первая будетъ нулемъ; а слѣдовательно избытокъ E_1 второй функціи представляетъ такое разность между числомъ, показывающимъ сколько разъ первая функція, переходя чрезъ *нульное* значеніе, дѣлается положительною изъ отрицательной и числомъ, показывающимъ сколько разъ эта функція дѣлается отрицательною изъ положительной тоже при переходѣ чрезъ нульное значеніе. Но какъ всякая функція непрерывная можетъ мѣнять знакъ только при переходѣ чрезъ нульное или чрезъ безконечное значеніе, то сумма избытковъ $E + E_1$ будетъ очевидно выражать разность между числомъ, показывающимъ сколько разъ функція $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, мѣняя знакъ, переходитъ изъ отрицательной въ положительную и числомъ, показывающимъ сколько разъ эта функція переходитъ наоборотъ — изъ положительной величины въ отрицательную. Эту разность, назвавъ ее $N - N'$, легко опредѣлить, если извѣстны знаки количествъ $\varphi_1(x_0)$, $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(X)$, $\varphi(X)$. Въ самомъ дѣлѣ, если обѣ дроби $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}$ и $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$ имѣютъ одинакіе знаки, то очевидно, при измѣненіи перемѣннаго отъ x_0 до X, функція $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ столько же разъ перейдетъ изъ отрицательной въ положительную, сколько и изъ положительной въ отрицательную; а слѣдовательно въ этомъ случаѣ $N - N' = 0$. Если первая дробь будетъ отрицательна, а вторая положительна, то, очевидно, функція $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ однимъ разомъ больше перейдетъ изъ отрицательной въ положительную, нежели изъ положительной въ отрицательную; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $N - N' = 1$. Наконецъ, если пер-

вая дробь $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)} > 0$, а вторая $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)} < 0$, то, по той же причинѣ, $N - N' = -1$. И такъ сумма избытковъ $E + E_1$ можетъ быть или нулемъ, или $+1$, или -1, смотря по знакамъ дробей $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}$ и $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$.

25. Условимся называть *постоянствомъ знаковъ* совокупность двухъ количествъ, имѣющихъ *одинакіе* знаки, или просто совокупность двухъ одинакихъ знаковъ; *перемѣною знаковъ* будемъ называть совокупность количествъ, имѣющихъ *различные* знаки, или просто совокупность двухъ *различныхъ* знаковъ. Принявъ такія названія, мы предыдущую теорему можемъ выразить такимъ образомъ: сумма избытковъ $E + E_1$ двухъ обратныхъ раціональныхъ дробей $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, между границами x_0 и X, будетъ нулемъ, если объ пары величинъ $\varphi_1(x_0)$, $\varphi(x_0)$ и $\varphi_1(X)$, $\varphi(X)$ представляютъ или постоянство знаковъ или объ представляютъ перемѣны знаковъ; сумма $E + E_1$ будетъ равна $+1$, если пара величинъ $\varphi_1(x_0)$, $\varphi(x_0)$ представляетъ перемѣну знаковъ, а другая пара величинъ $\varphi_1(X)$, $\varphi(X)$ — постоянство; наконецъ $E + E_1 = -1$, если первая пара $\varphi_1(x_0)$, $\varphi(x_0)$ представляетъ постоянство знаковъ, а вторая $\varphi_1(X)$, $\varphi(X)$ — перемѣну. Вслѣдствіе этой теоремы, избытокъ E весьма легко вычислить по данному избытку E_1 и на оборотъ.

5) Если степень знаменателя $\varphi(x)$ раціональной дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ меньше степени числителя $\varphi_1(x)$, то, называя частное отъ дѣленія $\varphi_1(x)$ на $\varphi(x)$ буквою Q и остатокъ $\psi(x)$, получимъ:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = Q + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Изъ этаго уравненія видно во первыхъ, что двѣ дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ въ одно и тоже время дѣлаются безконечными, во вторыхъ, что для

значеній x весьма близкихъ къ тѣмъ, которыя доставляютъ этимъ дробямъ безконечныя значенія, онѣ имѣютъ одинакій знакъ, потому что эти дроби, для такихъ значеній x, пріобрѣтаютъ значенія весьма большія, и слѣдовательно знакъ второй части предыдущаго уравненія, въ этомъ случаѣ, зависитъ отъ знака дроби $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$. Изъ этаго слѣдуетъ, что дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, пріобрѣтая безконечное значеніе, въ одно время переходятъ изъ положительныхъ въ отрицательныя или наоборотъ; а слѣдовательно избытки этихъ дробей всегда равны между собою, и потому вычисленіе избытка E дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ всегда можетъ быть сведено къ вычисленію избытка простѣйшей дроби $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$.

6) Предположимъ, что въ дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ степень числителя меньше степени знаменателя и назовемъ избытокъ ее E, между тѣми же границами x_0 и X. Если избытокъ обратной дроби $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ назовемъ E_1, то $E = -E_1 + \varepsilon$ гдѣ ε равно 0, ± 1 (4-е свойство). Съ другой стороны, если

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q + \frac{\chi(x)}{\varphi_1(x)}$$

и если избытокъ дроби $\frac{\chi(x)}{\varphi_1(x)}$ назовемъ E'', то $E_1 = E''$; если же $-\chi(x)$ назовемъ $\varphi_2(x)$, и избытокъ дроби $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ назовемъ E', то $E' = -E'' = -E_1$ (3-е свойство). А слѣдовательно

$$E = E' + \varepsilon.$$

Это свойство показываетъ, что для вычисленія избытка E правильной дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ должно составить уравненіе

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)};$$

тогда избытокъ искомый E будетъ равняться избытку E' простѣйшей дроби $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ сложенному съ величиною, ε которая имѣетъ уже извѣстное значеніе. Для составленія предыдущаго уравненія, какъ это очевидно, должно *знаменателя* данной дроби раздѣлить на *числителя* и предъ остаткомъ перемѣнить знакъ.

26. На основаніи этихъ свойствъ легко вычислить избытокъ E дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, въ которой числитель всегда будемъ предполагать степени меньшей противъ знаменателя. Въ самомъ дѣлѣ, поступаемъ съ дробью $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ такъ, какъ поступаемъ при отыскиваніи общаго наибольшаго дѣлителя между многочленами $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$, съ тѣмъ только различіемъ, что при остаткѣ будемъ каждый разъ перемѣнять знакъ на противный; назовемъ $Q, Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_m \ldots\ldots Q_{n-1}$, частныя; $\varphi_2(x), \varphi_3(x) \ldots\ldots \varphi_m(x), \ldots\ldots \varphi_n(x)$ остатки, взятые съ противными знаками. Тогда предполагая, что дѣленіе продолжается до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится нуль, и что послѣдній дѣлитель есть $\varphi_n(x)$, получимъ рядъ уравненій:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \dfrac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \dfrac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}, \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \dfrac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \dfrac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1} \end{cases}$$

$\varphi_n(x)$, послѣдній дѣлитель, будетъ функціей x или просто числомъ, смотря потому допускаютъ ли функціи $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ общаго наибольшаго дѣлителя — функцію отъ x, или нѣтъ. Назовемъ $E, E_1, E_2, \ldots\ldots E_m, \ldots\ldots E_{n-2}, E_{n-1}, E_n$ соотвѣтственные избытки дробей

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \ldots\ldots \frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}, \ldots\ldots \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}, \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

и ε_1, ε_2, ε_3, ... ε_{n-1} величины подобныя той, которую мы назвали ε (6-е свойство). Тогда получимъ:

$$E = E_1 + \varepsilon, \quad E_1 = E_2 + \varepsilon_1, \ldots\ldots E_m = E_{m-1} + \varepsilon_m, \ldots\ldots$$
$$E_{n-2} = E_{n-1} + \varepsilon_{n-2}, \quad E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1},$$

наконецъ $E_n = 0$, потому что $\varphi_n(x)$ дѣлитъ на цѣло $\varphi_{n-1}(x)$ по предположенію. — Складывая послѣднія уравненія мы получимъ:

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_m + \ldots\ldots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}.$$

Чтобы найдти числа ε, ε_1, ε_2 ..... ε_{n-1} поставимъ въ функціи $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_n(x)$, границы x_0 и X и полученные результаты напишемъ по порядку такимъ образомъ:

$\varphi(x_0), \varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots \varphi_{m-1}(x_0), \varphi_m(x_0), \varphi_{m+1}(x_0), \ldots \varphi_{n-1}(x_0), \varphi_n(x_0)$ (x_0).

$\varphi(X), \varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots \varphi_{m+1}(X), \varphi_m(X), \varphi_{m+1}(X), \ldots \varphi_{n-1}(X), \varphi_n(X)$ (X).

Разсматривая эти ряды, легко видѣть (4-е свойство), что $\varepsilon = 0$, если двѣ пары величинъ $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$ обѣ представляютъ постоянство знаковъ или обѣ—перемѣны, $\varepsilon = -1$, если первая пара представляетъ постоянство, а вторая перемѣну знаковъ; наконецъ $\varepsilon = +1$, если первая нара представляетъ перемѣну, а вторая постоянство. Подобнымъ образомъ $\varepsilon_1 = 0$, если обѣ пары величинъ $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$ и $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$ представляютъ или перемѣну или постоянство знаковъ; $\varepsilon_1 = \mp 1$ смотря потому первая ли пара представляетъ постоянство, а вторая перемѣну знаковъ или наоборотъ. Изъ этаго видно, что если ограничимся первыми тремя членами рядовъ (x_0) и (X), то сумма $\varepsilon + \varepsilon_1$ будетъ равна разности между числомъ перемѣнъ трехъ членовъ верхняго ряда $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$ и числомъ перемѣнъ трехъ членовъ нижняго ряда $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$; а какъ каждое число изъ ряда ε, ε_1, ε_2, ... ε_{n-1} опредѣляется совершенно такимъ же образомъ какъ и числа ε и ε_1, то и слѣдуетъ заключить, что если возмемъ разность между числомъ перемѣнъ во всемъ ряду (x_0) и числомъ перемѣнъ во всемъ ряду (X) то эта разность будетъ равна суммѣ

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1}.$$

И такъ назовемъ V число перемѣнъ въ ряду (x_0) и V' число перемѣнъ въ ряду (X), мы получимъ

$$E = V - V'.$$

А слѣдовательно, для вычисленія избытка раціональной дроби $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, должно составивъ ряды (x_0) и (X), такъ какъ мы это сдѣлали и найдти числа V и V'.

27. Замѣтимъ, что, для вычисленія избытка E между границами x_0 и X, можно остановить дѣйствіе общаго наибольшаго дѣлителя на такомъ остаткѣ $\varphi_m(x)$, который не уничтожается ни для какихъ дѣйствительныхъ значеній x между принятыми границами. Въ самомъ дѣлѣ, избытокъ E_m дроби $\frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi_m(x)}$ въ этомъ случаѣ будетъ нулемъ; но

$$E_m = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1},$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{m-1}.$$

И такъ, для вычисленія избытка E, достаточно найдти число перемѣнъ знаковъ въ рядахъ

$$\varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(x_0),\ \varphi_m(x_0)$$

$$\varphi(X),\ \varphi_1(X),\ \varphi_2(X),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(X),\ \varphi_m(X),$$

гдѣ $\varphi_m(x)$ первая функція, неуничтожающаяся ни для какихъ значеній x между границами x_0 и X.

Прим. 1-й. Найдти избытокъ дроби

$$\frac{4x^3 - 6x^2 + 16x - 3}{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 3x - 2}$$

между границами -1 и $+1$.

Отв. $E = 2$.

Прим. 2-й. Найдти избытокъ дроби

$$\frac{4x^3 + 12x^2 - 24x + 8}{x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 4}$$

между границами -10 и $+10$.

Отв. $E = 2$.

Прим. 3-й. Найдти избытокъ дроби

$$\frac{5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46}{x^6 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101}$$

между границами -10 и $+10$

Отв. $E = 3$.

28. Не трудно доказать, что если нѣкоторые изъ членовъ ряда (x_0) или (X) уничтожаются, то, для вычисленія избытка E, можно эти члены отбросить и сосчитать число перемѣнъ въ рядахъ (x_0) и (X), такъ какъ бы этихъ членовъ совершенно не было.

Въ самомъ дѣлѣ если x_0 и X не суть корни уравненія $\varphi(x) = 0$, какъ это мы всегда будемъ предполагать, то два члена сряду въ рядахъ (x_0) и (X) уничтожиться не могутъ. И дѣйствительно, предположивъ, что уничтожаются напримѣръ два члена сряду $\varphi_m(x)$ и $\varphi_{m+1}(x)$, увидимъ, что всѣ остальные члены (1) ряда будутъ нулями, потому что изъ уравненій (A) мы получимъ

$$\varphi(x) = Q\varphi_1(x) - \varphi_2(x),\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\,Q_1 - \varphi_3(x),\ \ldots\ldots$$

$$\varphi_m(x) = Q_m\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{m+2}(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_{n-2}(x) = Q_{n-2}\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)$$

откуда видно, что при уничтоженіи двухъ членовъ $\varphi_m(x)$ и $\varphi_{m+1}(x)$ для $x = x_0$, и всѣ остальные члены ряда (x_0) уничтожатся; а слѣдовательно и $\varphi(x_0)$, что противорѣчитъ предположенію.

И такъ предположимъ, что для $x = x_0$ уничтожается одинъ членъ $\varphi_m(x)$; изъ предыдущихъ уравненій легко видѣть, что два

смѣжные съ нимъ члена $\varphi_{m-1}(x)$ и $\varphi_{m+1}(x)$ будутъ съ противными знаками, потому что, въ слѣдствіе уничтоженія члена $\varphi_m(x)$, изъ предыдущихъ уравненій получимъ $\varphi_{m-1}(x_0) = -\varphi_{m+1}(x_0)$. Замѣтивъ это, назовемъ $x' = x_0 + i$, число безконечно близкое къ x_0, которое, не уничтожая функціи $\varphi_m(x)$ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ члены ряда (x_0) имѣютъ для $x = x'$ тѣже самые знаки, которые имѣютъ они и для $x = x_0$. Тогда, для вычисленія избытка E, должно число V' перемѣнъ знаковъ ряда (X) вычесть изъ числа V_1 перемѣнъ ряда

$$\varphi(x'),\ \varphi_1(x'),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(x'),\ \varphi_m(x'),\ \varphi_{m+1}(x'),\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x') \quad (x').$$

Но V_1, число перемѣнъ этаго ряда, очевидно, равно числу перемѣнъ V' ряда (x_0), въ которомъ опущенъ нульный членъ $\varphi_m(x_0)$; потому во первыхъ, что, опуская въ ряду (x') членъ $\varphi_m(x')$, всѣ другіе члены этаго ряда имѣютъ знаки соотвѣтственно одинаніе съ членами ряда (x_0) и во вторыхъ, каковъ бы не былъ знакъ члена $\varphi_m(x')$, совокупность трехъ членовъ $\varphi_{m-1}(x')$, $\varphi_m(x')$, $\varphi_{m+1}(x')$ будетъ представлять только одну перемѣну, все равно какъ и совокупность только двухъ членовъ $\varphi_{m-1}(x')$ и $\varphi_{m+1}(x')$, потому что эти послѣдніе, также какъ и члены $\varphi_{m-1}(x_0)$ и $\varphi_{m+1}(x_0)$, имѣютъ противные знаки.

Изъ этаго слѣдуетъ, что для вычисленія избытка E, между границами x_0 и X, должно всегда брать разность $V - V'$ перемѣнъ знаковъ въ рядахъ (x_0) и (X) не обращая вниманія на уничтожающіеся члены, такъ какъ бы ихъ совсѣмъ небыло.

29. Выведемъ теперь изъ теоріи избытковъ нѣкоторыя слѣдствія, полезныя для насъ при рѣшеніи алгебраическихъ уравненій.

Пусть

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

алгебраическое уравненіе степени m, неимѣющее равныхъ корней; $F'(x)$ первая производная функція $F(x)$ и α корень уравненія (1). Назовемъ h весьма малую положительную величину; легко ви-

дѣть, что отношеніе $\frac{F'(x)}{F(x)}$ дѣлается безконечнымъ при $x=\alpha$, и притомъ, пріобрѣтая это безконечное значеніе, переходитъ изъ отрицательнаго въ положительное въ то время, какъ x переходитъ отъ $\alpha-h$ къ $\alpha+h$.

Въ самомъ дѣлѣ, при уничтоженіи функціи $F(x)$, $F'(x)$ уничтожиться не можетъ, ибо данное уравненіе, по предположенію, не имѣетъ равныхъ корней; притомъ мы знаемъ, что начальная функція $F(x)$ до своего уничтоженія имѣетъ всегда противный знакъ съ своею первою производною, а послѣ уничтоженія — одинакій; а слѣдовательно, когда x переходитъ чрезъ значеніе $x=\alpha$, отношеніе $\frac{F'(x)}{F(x)}$ пріобрѣтаетъ безконечное значеніе и переходитъ изъ отрицательнаго въ положительное. Это заключеніе, очевидно, относится ко всѣмъ дѣйствительнымъ корнямъ уравненія $F(x)=0$; а слѣдовательно, если это уравненіе имѣетъ n дѣйствительныхъ корней $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots l$ между границами x_0 и X, отношеніе $\frac{F'(x)}{F(x)}$ дѣлаясь безконечнымъ для каждаго изъ этихъ корней, n разъ перейдетъ изъ отрицательнаго въ положительное. Сверхъ того, какъ это отношеніе не можетъ сдѣлаться безконечнымъ между границами x_0 и X ни для какихъ дѣйствительныхъ значеній x отличныхъ отъ $\alpha, \beta. \gamma \ldots. l$ и слѣдовательно всегда, пріобрѣтая безконечное значеніе, между этими границами, переходитъ изъ отрицательнаго въ положительное, то избытокъ E дроби $\frac{F'(x)}{F(x)}$ будетъ равенъ n. Отсюда слѣдуетъ:

Теорема. Число различныхъ дѣйствительныхъ корней уравненія $F(x)=0$, *находящихся между границами* x_0 *и* X, *равно избытку* E *дроби* $\frac{F'(x)}{F(x)}$ *между тѣми же границами.*

Эта теорема можетъ быть выражена иначе.

Пусть: $F(x)=0$ алгебраическое уравненіе, не имѣющее рав-

ныхъ корней, $F'(x)$ первая производная функція $F(x)$. Поступаемъ съ этими функціями такъ, какъ поступали бы при отысканіи ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, съ тою только разницею, что каждый полученный отъ дѣленія остатокъ беремъ съ противнымъ знакомъ; тогда, назвавъ эти остатки съ противными знаками $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... $F_r(x)$, и вычисливъ ряды величинъ:

$$(A)\quad \begin{cases} F(x_0),\ F'(x_0),\ F_1(x_0),\ F_2(x_0),\ \ldots\ldots\ F_{r-1}(x_0),\ F_r(x_0) \\ F(X),\ F'(X),\ F_1(X),\ F_2(X),\ \ldots\ldots\ F_{r-1}(X),\ F_r(X), \end{cases}$$

сосчитаемъ число перемѣнъ знаковъ V въ верхнемъ ряду и число перемѣнъ V' въ нижнемъ ряду; разность $V - V' = E$ покажетъ *число дѣйствительныхъ корней уравненія* $F(x) = 0$ *между границами* x_0 *и* X.

Теорема эта принадлежитъ Штурму (Sturm), который положилъ ее въ основаніе своего способа для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій.

При этомъ должно замѣтить, что производя дѣйствіе отысканія общаго наибольшаго дѣлителя надъ функціями $F(x)$ и $F'(x)$, всегда можно остановиться (вслѣдствіе сдѣланнаго уже замѣчанія) какъ скоро дойдемъ до такого остатка $F_r(x)$, который не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между границами x_0 и X. Если нѣкоторые изъ членовъ рядовъ (A) уничтожаются, то должно производить счетъ перемѣнъ не обращая вниманія на эти члены, такъ какъ бы ихъ совсѣмъ не было.

30. *Теорема Ролля* (Rolle). Если уравненіе $F'(x) = 0$, гдѣ F' означаетъ первую производную отъ F, между границами x_0 и X, имѣетъ n дѣйствительныхъ корней, то уравненіе $F(x) = 0$ между тѣми же границами не можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней больше $n + 1$.

Назовемъ избытки двухъ обратныхъ одна въ отношеніи другой дробей $\frac{F'(x)}{F(x)}$ и $\frac{F(x)}{F'(x)}$ буквами E и E'; тогда (въ слѣдствіе 4-го свойства) получимъ:

$$E = -E' + \varepsilon,$$

гдѣ $\varepsilon = 0, \pm 1$. Но если n есть число дѣйствительныхъ корней уравненія $F'(x) = 0$, то $-E$ можетъ быть равно n только въ томъ случаѣ, когда дробь $\frac{F(x)}{F'(x)}$, дѣлаясь безконечною, постоянно переходитъ изъ положительной въ отрицательную, во всякомъ другомъ случаѣ $-E < n$; съ другой стороны E именно равно числу дѣйствительныхъ корней уравненія $F(x) = 0$; слѣдовательно, это число не можетъ быть болѣе $n + 1$. Если $n = 0$, то и $E = 0$; и слѣдовательно между тѣми границами, между которыми нѣтъ дѣйствительныхъ корней функціи $F'(x)$, дѣйствительныхъ корней функціи $F(x)$ не можетъ быть больше одного. Изъ этаго слѣдуетъ, что если корни уравненія $F'(x) = 0$, a', a'', a''', ... $a^{(n)}$ расположены по порядку, начиная съ меньшаго, то уравненіе $F(x) = 0$ не можетъ имѣть больше одного дѣйствительнаго корня меньшаго a', больше одного лежащаго между a' и a'' и т. д. и наконецъ больше одного большаго $a^{(n)}$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы напр. функція $F(x)$ имѣла два корня a_1 и a_2 меньшихъ a', то взявъ границами перемѣннаго $x_0 < a_1$ и $X < a'$ и $> a_2$, увидимъ, что между этими границами функція $F'(x)$ не имѣетъ ни одного дѣйствительнаго корня, тогда какъ функція $F(x)$, между тѣми же границами такихъ корней имѣетъ два, что невозможно. Подобнымъ образомъ, если преположимъ, что функція $F(x)$ имѣетъ два корня a_k и a_m между корнями a' и a'', то въ невозможности такого предположенія легко убѣдиться, принявъ за границы перемѣннаго $x_0 < a_k$ и $> a'$, и $X > a_m$ и $< a''$. И такъ далѣе.

Основываясь на этой теоремѣ, Ролль далъ, нынѣ оставленный, но въ свое время замѣчательный, способъ находить границы, между которыми лежитъ каждый дѣйствительный корень алгебраическаго уравненія. Способъ Ролля извѣстенъ подъ именемъ *способа каскадъ*.

31. *Теорема Фурье* (Fourier).

Число дѣйствительныхъ корней алгебраическаго уравненія m-й степени

$$F(x) = 0,$$

находящихся между границами x_0 и X, не можетъ быть болѣе разности $V_1 - V_2$ между числами V_1 и V_2 перемѣнъ знаковъ въ рядахъ

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F''(x_0),\ \ldots\ldots\ F^{(m-1)}(x_0),\ F^{(m)}(x_0)$$
$$F(X),\ F'(X),\ F''(X),\ \ldots\ldots\ F^{(m-1)}(X),\ F^{(m)}(X),$$

въ которыхъ F', F'', $\ldots\ldots$ $F^{(m)}$ означаютъ m производныхъ данной функціи F.

Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ n, n', n'', $\ldots\ldots$ $n^{(m)}$, соотвѣтственно, число корней каждаго изъ уравненій

$$F(x) = 0,\ F'(x) = 0,\ F''(x) = 0,\ \ldots\ldots\ F^{(m)}(x) = 0,$$

находящихся между границами x_0 и X. $n^{(m)}$ очевидно будетъ равно нулю, ибо m есть степень даннаго уравненія, и слѣдовательно $F^{(m)}(x)$ есть величина постоянная $= 1.2.3.\ldots\ldots (m-1)m$. Замѣтивъ это, вслѣдствіе теоремы Ролля, мы будемъ имѣть $n \leqq n' + \varepsilon$, гдѣ $\varepsilon = 0$, если двѣ пары величинъ $F(x_0)$, $F'(x_0)$ и $F(X)$, $F'(X)$ представляютъ въ одно и тоже время перемѣну знаковъ или послѣдовательность; $\varepsilon = +1$, если первая пара представляетъ перемѣну, а вторая послѣдовательность и наконецъ $\varepsilon = -1$, если первая пара представляетъ послѣдовательность, а вторая перемѣну знаковъ. Подобнымъ образомъ

$$n' \leqq n'' + \varepsilon_1,\ n'' \leqq n''' + \varepsilon_2,\ \ldots\ldots\ n^{m-1} = n^{(m)} + \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_{m-1},$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_{m-1}$ величины, имѣющія значеніе подобное ε; складывая всѣ эти неравенства, получимъ

$$n \leqq \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\ldots + \varepsilon_{m-1},$$

Но сумма $\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{m-1}$ есть разность $V_1 - V_2$; слѣдовательно $n \leqq V_1 - V_2$.

32. *Теорема Декарта* (Descartes). Число положительныхъ корней уравненія

$$F(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots A_{m-1} x + A_m = 0$$

не можетъ быть болѣе числа V перемѣнъ знаковъ, которые представляетъ рядъ коеффиціентовъ

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots A_{m-1},\ A_m,$$

а число отрицательныхъ корней не можетъ быть больше числа послѣдовательностей знаковъ при тѣхъ же коеффиціентахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ предыдущей теоремѣ примемъ $x_0 = 0$ и $X = \infty$, то функціи $F(x)$, $F'(x)$, ... $F^{(m)}(x)$ для $x = \infty$ будутъ имѣть знаки первыхъ своихъ членовъ x^m, mx^{m-1}, $m(m-1)x^{m-2}$, ... $m(m-2)$ ..... 3. 2. 1, потому что, для весьма большихъ значеній x, первые члены этихъ функцій будутъ болѣе суммы всѣхъ остальныхъ; и такъ величины

$$F(\infty),\ F'(\infty),\ \ldots\ldots\ldots\ F^{(m-1)}(\infty),\ F^{(m)}(\infty)$$

всѣ будутъ положительныя и слѣдовательно этотъ рядъ не представляетъ ни одной перемѣны. Съ другой стороны $x = 0$ доставитъ функціямъ $F(x)$, $F'(x)$, ... $F^m(x)$ знаки ихъ послѣднихъ членовъ

$$A_m,\ A_{m-1},\ 1.2\,A_{m-2},\ 1.2.3\,A_{m-3},\ \ldots\ldots\ 1.2.3\ldots\ldots m, \qquad (0)$$

т. е. знаки коеффиціентовъ даннаго уравненія. А слѣдовательно, для примѣненія предыдущей теоремы къ настоящему случаю, должно принять $V_1 = V$ и $V_2 = 0$, тогда n, число корней между границами 0 и $+\infty$, т. е. положительныхъ корней даннаго уравненія, будетъ $\leq V$. Подобнымъ образомъ, если примемъ за границы перемѣнной $-\infty$ и 0, тогда знаки ряда

$$F(-\infty),\ F'(-\infty),\ \ldots\ldots\ F^{(m-1)}(-\infty),\ F^{(m)}(-\infty)$$

будутъ по перемѣнно положительные и отрицательные, начиная съ послѣдняго, и потому весь этотъ рядъ будетъ представлять перемѣны знаковъ. Слѣдовательно, сколько такихъ перемѣнъ замѣнилось послѣдовательностями въ ряду (0), столько же можетъ быть корней уравненія $F(x) = 0$, между границами $-\infty$ и 0, т. е. отрицательныхъ корней этаго уравненія.

О рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій.

33. Подъ именемъ численныхъ алгебраическихъ уравненій разумѣются такія, въ которыхъ коеффиціенты при неизвѣстной величинѣ суть дѣйствительныя числа. Рѣшить такое уравненіе значитъ найдти въ числахъ всѣ значенія неизвѣстной величины, которыя приводятъ уравненіе къ тождественному, или иначе — найдти его корни.

Обыкновенно задачу эту разбиваютъ на два отдѣла; въ первомъ для каждаго дѣйствительнаго корня уравненія находятъ двѣ границы или два числа, изъ которыхъ одно меньше его, другое больше; это дѣйствіе называется *отдѣленіемъ дѣйствительныхъ корней*; во второмъ имѣя границы каждаго корня, вычисляютъ истинное его значеніе по приближенію, но съ какою угодно точностію. Для такаго рѣшенія уравненій обыкновенно употребляютъ способы *Штурма* и *Фурье*. Способъ Штурма представляетъ рѣшеніе только перваго отдѣла задачи, т. е. отысканіе границъ дѣйствительныхъ корней уравненія, и должно сказать, что этотъ отдѣлъ есть главный. Способъ же Фурье, кромѣ отысканія границъ корней, даетъ средство вычислить ихъ по приближенію, съ какою угодно точностію; но ни способъ Фурье, ни способъ Штурма не представляютъ полнаго рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій, ибо не даютъ ни какаго средства найдти воображаемые корни; они указываютъ только содержитъ ли данное уравненіе воображаемые корни, или нѣтъ. По этому, впослѣдствіи, мы изложимъ еще способъ рѣшенія численныхъ уравненій, принадлежащій *Греффе*, который соединивъ оба отдѣла задачи въ одинъ, даетъ способъ вычислить, не только дѣйствительные но и воображаемые корни уравненія, съ какою угодно точностію.

Мы изложимъ сначала способъ Штурма, какъ самый простѣйшій по теоріи.

Способъ Штурма.

34. Мы видѣли, что теорема Штурма, какъ слѣдствіе свойства избытковъ, прямо даетъ возможность опредѣлить число дѣйствительныхъ корней алгебраическаго уравненія

$$F(x) = 0, \qquad (1).$$

находящихся между извѣстными границами x_0 и X.

Для этаго съ функціею $F(x)$ и ея первою производною должно поступать такъ, какъ поступаютъ при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя, перемѣняя только каждый разъ у получаемыхъ остатковъ знаки, и составить ряды величинъ

$$(2) \quad \begin{cases} F(x_0),\ F'(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(x_0),\ \varphi_m(x) \\ F(X),\ F'(X),\ \varphi_1(X),\ \varphi_2(X),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(X),\ \varphi_m(X); \end{cases}$$

тогда, взявъ разность между числомъ V перемѣнъ въ верхнемъ ряду и числомъ V' перемѣнъ въ нижнемъ ряду, мы получимъ $V - V'$, число дѣйствительныхъ корней уравненія между границами x_0 и X.

35. Теорему Штурма можно доказать не пользуясь свойствами избытковъ. Для этаго предположимъ во первыхъ, что въ уравненіи

$$F(x) = 0$$

всѣ равные корни уже отдѣлены предварительно по общимъ способамъ, такъ что оно не имѣетъ уже равныхъ корней. Тогда составляемъ, по предыдущему, ряды величинъ (2), продолжая при томъ дѣйствіе отысканія общаго наибольшаго дѣлителя до такого остатка $\varphi_m(x)$, который будетъ уже просто числомъ, чего необходимо достигнемъ, ибо только въ случаѣ равныхъ корней функція $F(x)$ и ея первая производная имѣютъ общаго дѣлителя функцію отъ x. Изъ этаго слѣдуетъ, что $\varphi_m(x)$ ни для какихъ значеній x уничтожиться не можетъ, и слѣдовательно сохранитъ постоянно свой знакъ.

Разсматривая ряды (2) легко доказать, какъ уже это мы и видѣли, слѣдующія ихъ свойства.

1) Въ ряду

$$F(x),\ F'(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_{m-1}(x) \qquad (3)$$

два члена сряду уничтожиться не могутъ.

2) Знаки въ обоихъ рядахъ (2) будутъ одни и тѣже, если ни одна изъ функцій ряда (3) между границами x_0 и X не уничтожается; потому что эти функціи могутъ перемѣнять знаки только при переходѣ чрезъ нульное значеніе.

3) Число перемѣнъ знаковъ въ рядахъ (2) будетъ одно и тоже, если между границами x_0 и X уничтожается одна или нѣсколько (но не сряду) функцій среднихъ, потому что при уничтоженіи одной изъ среднихъ функцій двѣ сосѣднія съ нею имѣютъ противные знаки, и слѣдовательно, до уничтоженія и послѣ уничтоженія средней функціи, число перемѣнъ знаковъ въ трехъ функціяхъ сосѣднихъ, изъ которыхъ средняя уничтожается, всегда будетъ одно и тоже и равно единицѣ.

4) Замѣчая, что до своего уничтоженія начальная функція $F(x)$ съ своею производною $F'(x)$ имѣетъ знакъ противный, а послѣ уничтоженія одинакій, легко видѣть, что если x при своемъ измѣненіи отъ x_0 до X переходитъ чрезъ такое значеніе α, которое уничтожаетъ функцію $F(x)$, то рядъ (3) непремѣнно теряетъ одну перемѣну знаковъ.

И такъ перемѣны знаковъ, не теряясь отъ уничтоженія среднихъ функцій могутъ теряться только тогда, когда уничтожается начальная функція $F(x)$, и какъ каждый разъ, при переходѣ этой функціи чрезъ нульное значеніе, теряется только одна перемѣна, то число теряющихся перемѣнъ въ ряду (3) при переходѣ x отъ x_0 до X равно числу, показывающему сколько разъ уничтожается функція $F(x)$ въ разсматриваемомъ промежуткѣ, т. е. равно числу дѣйствительныхъ корней уравненія (1) лежащихъ въ границахъ x_0 и X.

36. Этотъ способъ даетъ возможность, съ перваго раза, опредѣлить число всѣхъ дѣйствительныхъ корней уравненія (1). Для этаго должно только въ рядахъ (3) принять $x_0 = -\infty$ и $X = +\infty$; тогда разность между числомъ перемѣнъ знаковъ въ этихъ рядахъ и будетъ равна числу всѣхъ дѣйствительныхъ корней разсматриваемаго уравненія. Если это число меньше показателя степени функціи $F(x)$, то недостающіе корни указываютъ на присутствіе воображаемыхъ корней, которыхъ всегда будетъ число четное.

37. Отыскавъ число дѣйствительныхъ корней уравненія (1), легко найдти для каждаго изъ нихъ двѣ границы, изъ которыхъ одна меньше корня, другая больше его. Для этаго въ рядахъ функцій (3) вставляемъ вмѣсто x числа 0, 10, 100 и т. д. до тѣхъ поръ, пока получимъ въ этомъ ряду тѣже знаки, какіе получили бы отъ вставки $+\infty$. Число теряющихся перемѣнъ между каждою парою изъ этихъ чиселъ укажетъ на число находящихся между ними дѣйствительныхъ корней уравненія (1). Если напр. найдемъ; что между 0 и 10 находятся два корня, то въ рядъ (3) вставляемъ вмѣсто x числа 1, 2, 3, ... 10, тогда увидимъ между какими изъ этихъ чиселъ находятся искомые корни; если напр. они лежатъ оба между 2 и 3, то въ рядъ (3) вставляемъ 2, 1; 2, 2; 2, 3; .... и продолжаемъ это дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока для каждаго корня отдѣльно найдемъ два числа, между которыми онъ находится. Подобнымъ же образомъ поступаемъ и для отдѣленія корней отрицательныхъ, только тогда вмѣсто положительныхъ чиселъ употребляемъ отрицательныя $-10, -100, \ldots\ldots, -1, 2, \ldots\ldots$

38. Не смотря на простоту способа Штурма, должно сознаться, что онъ, отъ послѣдовательныхъ дѣленій становится весьма затруднительнымъ въ примѣненіи къ уравненіямъ, которыхъ степень значительно высока. Иногда однакоже, въ примѣненіи, способъ Штурма можно значительно упрощать.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что составленіе членовъ ряда (3) имѣетъ цѣлію опредѣленіе знаковъ, которые получаютъ эти члены

отъ подстановленія вмѣсто перемѣнной x различныхъ чиселъ; а потому, при составленіи этихъ членовъ мы всегда можемъ отбрасывать въ нихъ такихъ множителей, которые не имѣютъ вліянія на знакъ, при какихъ угодно дѣйствительныхъ значеніяхъ для x, а только на численную величину разсматриваемаго члена.

39. Это можно доказать и прямо. Предположимъ, что дано алгебраическое уравненіе

$$F(x) = 0;$$

вмѣсто производной функціи $F'(x)$ беремъ функцію $f(x)$ такого свойства, чтобы функція $F(x)$ до своего уничтоженія имѣла различный съ нею знакъ, а послѣ уничтоженія одинакій; во вторыхъ эта функція не должна имѣть общаго дѣлителя съ $F(x)$, и наконецъ степень ея должна быть ниже степени функціи $F(x)$. Поступаемъ съ функціями $F(x)$ и $f(x)$, такъ, какъ въ способѣ Штурма поступаютъ съ функціями $F(x)$ и $F'(x)$; и составляемъ ряды членовъ:

$$F(x),\ f(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_i(x) \qquad (4).$$

Нетрудно убѣдиться что этотъ рядъ имѣетъ тѣ же самыя свойства, какъ и рядъ (3); всѣ эти свойства, одно за другимъ, доказываются точно такимъ же образомъ, какъ и въ случаѣ ряда (3). А слѣдовательно, рядъ (4) можетъ быть всегда употребленъ вмѣсто (3), когда идетъ дѣло объ отысканіи числа и границъ дѣйствительныхъ корней уравненія $F(x) = 0$; но этотъ рядъ можетъ быть, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, значительно проще ряда (3), что зависитъ отъ выбора функціи $f(x)$.

Объяснимъ это примѣромъ. Пусть

$$F(x) = x^5 - 5x - 7;$$

въ этомъ случая первая производная будетъ

$$F'(x) = 5x^4 - 5.$$

Но эта функція можетъ быть разложена на два множителя $5(x^3 + 1)$ и $x^2 - 1$, изъ которыхъ первый не имѣетъ вліянія на знакъ $F(x)$,

потому что для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x остается положительнымъ, и слѣдовательно можетъ быть отброшенъ; такимъ образомъ, въ настоящемъ случаѣ, за функцію $f(x)$, для составленія ряда (4) можетъ быть принята функція $x^2 - 1$, которая и удовлетворитъ всѣмъ требованіямъ вопроса; а такой выборъ значительно упроститъ вѣчисленіе.

Прим. 1-й. Найдти число и границы дѣйствительныхъ корней уравненія

$$x^3 - 2x + 5 = 0.$$

Отв. Это уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между границами 2 и 3.

Прим. 2-й. Найдти число и границы дѣйствительныхъ корней уравненія

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Отв. Всѣ три корня этаго уравненія дѣйствительные; два изъ нихъ положительные и заключаются между границами 1 и 1, 5; 1, 5 и 1, 7; третій корень отрицательный — между границами -3 и $-3, 1$.

Прим. 3-й. Доказать, что эллипсисы, представляемые уравненіями

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 = 6 \quad \text{и} \quad 2x^2 + y^2 = 2$$

не пересѣкаются между собою.

СПОСОБЪ БЮДАНА И ФУРЬЕ.

А. *Отдѣленіе дѣйствительныхъ корней.*

40. Въ 1803 г. Бюданъ представилъ Парижскому Національному институту мемуаръ, въ которомъ, основываясь на знаменитой теоремѣ Декарта относительно числа положительныхъ и отрицательныхъ корней въ алгебраическихъ уравненіяхъ, предложилъ способъ для отдѣленія дѣйствительныхъ корней алгебраическихъ уравненій въ томъ случаѣ, когда воображаемыхъ корней они не имѣютъ.

Декартова теорема, или правило знаковъ, какъ мы видѣли, состоитъ въ слѣдующемъ:

Въ данномъ алгебраическомъ уравненіи

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

число положительныхъ дѣйствительныхъ корней не можетъ быть больше числа перемѣнъ знаковъ, которыя представляютъ коэффиціенты уравненія, а число отрицательныхъ корней не можетъ быть больше числа постоянствъ знаковъ. Напримѣръ въ уравненіи

$$x^6 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x - 3 = 0$$

коеффиціенты представляютъ три перемѣны знаковъ и два постоянства; слѣдовательно уравненіе это не можетъ имѣть больше трехъ положительныхъ и больше двухъ отрицательныхъ корней.

Если же всѣ корни алгебраическаго уравненія будутъ дѣйствительные, тогда число его положительныхъ корней *равно* числу перемѣнъ знаковъ, а число отрицательныхъ корней *равно* числу постоянствъ знаковъ. Это правило знаковъ было доказано впослѣдствіи многими геометрами. Мы уже видѣли его какъ слѣдствіе теоріи избытковъ.

41. Предположимъ, что уравненіе (1) имѣетъ всѣ корни дѣйствительные, и поставимъ въ него $z + a$ вмѣсто x, называя a число положительное; тогда въ уравненіи $F(z + a) = 0$ число перемѣнъ знаковъ при коеффиціентахъ z можетъ быть или одинаково съ даннымъ, или меньше числа перемѣнъ этаго послѣдняго. Въ первомъ случаѣ очевидно, что въ уравненіи (1) нѣтъ ни одного положительнаго корня меньшаго a; во второмъ — разность между числомъ перемѣнъ знаковъ въ уравненіяхъ $F(x) = 0$ и $F(z + a) = 0$ будетъ указывать на столько же положительныхъ корней уравненія (1) меньшихъ a. Въ самомъ дѣлѣ предположимъ, что уравненіе (1) имѣетъ r перемѣнъ знаковъ и слѣдовательно r положительныхъ корней, которые назовемъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \zeta$; въ число корней уравненія $F(z + a) = 0$ будутъ входить слѣдующіе $\alpha - a, \beta - a,$

$\gamma - a$, ... $\zeta - a$; но если число положительныхъ корней уравненія $F(z+a)=0$, т. е. число перемѣнъ знаковъ при коеффиціентахъ z, тоже что и въ данномъ уравненіи, то всѣ величины $\alpha - a$, $\beta - a$,... должны быть положительныя; это значитъ, что уравненіе (1) не имѣетъ ни одного положительнаго корня меньшаго a. Если же число положительныхъ корней уравненія $F(z+a)=0$, а слѣдовательно и число перемѣнъ знаковъ при коеффиціентахъ z, меньше числа положительныхъ корней уравненія (1), напримѣръ тремя, то это значитъ, что изъ числа величинъ $\alpha - a$, $\beta - a$, $\gamma - a$, ... $\zeta - a$, три отрицательныя, и слѣдовательно въ уравненіи (1) есть три положительныхъ корня меньшихъ a. Поэтому, если въ уравненіе (1) поставимъ, вмѣсто x, двѣ величины $z+a$ и $z+a+1$, то разность между числомъ перемѣнъ знаковъ при z въ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} &F(a) + zF'(a) + \frac{z^2}{c}F''(a) + \cdots\cdots\cdots + \frac{z^m}{c}F^{(m)}(a) = 0, \\ &F(a+1) + zF'(a+1) + \frac{z^2}{c}F''(a+1) + \cdots\cdots + \frac{z^m}{c}F^{(m)}(a+1) = 0. \end{aligned}\right\} (m)$$

укажетъ на число положительныхъ корней уравненія (1), находящихся между границами a и $a+1$.

42. Подобнымъ же образомъ, разсматривая число постоянствъ знаковъ въ уравненіяхъ $F(a+z)=0$, $F(z+a+1)=0$, ..., можемъ опредѣлить число отрицательныхъ корней даннаго уравненія между извѣстными границами, а потомъ подраздѣляя, промежутки между границами, можно отдѣлить всѣ корни даннаго уравненія, какъ положительные, такъ и отрицательные.

Этотъ способъ и данъ былъ Бюданомъ, съ большими подробностями, въ его Nouvelle méthode pour la résolution des équations numeriques (*).

43. Необходимо замѣтить, что способъ Бюдана приводится, какъ это очевидно изъ предыдущаго, къ тому чтобы въ рядъ функцій

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \cdots\cdots\ F^{(m)}(x) \qquad (2)$$

(*) Résol. des équations numer. par Lagrange, p. 165.

вставлять числа a, b, c, ...; затѣмъ, написавъ въ строку ряды знаковъ при результатахъ этихъ подстановокъ, судить о числѣ дѣйствительныхъ корней уравненія $F(x) = 0$, лежащихъ между границами a и b, по числу изчезнувшихъ перемѣнъ въ этихъ рядахъ, при переходѣ отъ числа a, къ числу b.

44. Приводя этотъ способъ Бюдана, Лагранжъ говоритъ, что если данное уравненіе имѣетъ воображаемые корни, то въ уравненіяхъ (m), или все равно въ ряду (2), потеря перемѣнъ знаковъ можетъ произойти не указывая на содержаніе въ данномъ промежуткѣ дѣйствительныхъ корней уравненіе (1), но что если число теряющихся перемѣнъ не четное, тогда можно утвердительно сказать, что данное уравненіе, въ разсматриваемомъ промежуткѣ, одинъ дѣйствительный корень непремѣнно имѣетъ, но можетъ имѣть и больше, ибо потеря нечетнаго числа перемѣнъ можетъ произойти только тогда, когда въ уравненіяхъ (m) мѣняетъ знакъ членъ независящій отъ x (*).

Чтобы найдти двѣ границы, между которыми заключается каждый дѣйствительный корень какого угодно алгебраическаго уравненія, послѣ замѣчанія сдѣланнаго Лагранжемъ, оставалось различить случаи уничтоженія перемѣнъ въ ряду (2), указывающіе на содержаніе дѣйствительныхъ корней уравненія, отъ тѣхъ, когда это уничтоженіе не указываетъ на дѣйствительные корни. Для рѣшенія этаго вопроса Фурье, въ своемъ сочиненіи *Analyse des équations déterminées*, разсматриваетъ — какимъ образомъ уничтожаются перемѣны знаковъ въ ряду (2), когда x переходитъ рядомъ дѣйствительныхъ значеній отъ $-\infty$ до $+\infty$.

45. По данному алгебраическому уравненію m-ой степени

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

(*) Résol. des équations numer. par Lagrange, p. 166.

составляемъ рядъ производныхъ функцій отъ $F(x)$, начиная съ первой и до m-ой:

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ \ldots\ F^{(m-2)}(x),\ F^{(m-1)}(x),\ F^{(m)}(x) \qquad (2).$$

Предполагая, что въ данномъ уравненіи высшая степень x положительна и имѣетъ коеффиціентомъ единицу, замѣчаемъ что $F^{(m)}(x)$, какъ производная m-го порядка отъ цѣлой алгебраической функціи m-ой степени, есть величина постоянная и притомъ положительная ($m.\ m-1.\ m-2\ \ldots\ldots\ 2.\ 1$); чтоже касается до прочихъ функцій ряда (2), то въ нихъ высшая степень x, начаная съ $F^{(m-1)}(x)$, будетъ по перемѣнно *нечетная* и *четная*; притомъ, по свойству цѣлыхъ раціональныхъ функцій, при вставкѣ, вмѣсто перемѣнной x, весьма большой величины, знакъ всей функціи будетъ зависѣть отъ знака съ высшею степенью перемѣннаго. А слѣдовательно, если въ рядъ функцій (2), вмѣсто x, поставимъ послѣдовательно двѣ величины $-\infty$ и $+\infty$, то рядъ знаковъ при результатахъ вставки первой величины весь будетъ состоять изъ перемѣнъ, которыхъ числомъ будетъ m, тогда какъ рядъ знаковъ, отвѣчающихъ результатамъ вставки величины $+\infty$, не будетъ заключать ни одной перемѣны. И такъ, когда перемѣнная x въ ряду (2) измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, рядъ этотъ теряетъ m перемѣнъ знаковъ, т. е. именно столько, сколько уравненіе (1) имѣетъ дѣйствительныхъ и воображаемыхъ корней. Эта потеря происходитъ не вдругъ, но постепенно, по мѣрѣ того какъ x переходитъ рядомъ послѣдовательныхъ значеній отъ $-\infty$ до $+\infty$.

И въ самомъ дѣлѣ, прослѣдимъ этотъ рядъ значеній. Но замѣчаемъ, что весь этотъ рядъ намъ разсматривать не нужно, достаточно обратить вниманіе только на тѣ значенія x, для которыхъ нѣкоторыя изъ функцій ряда (2) уничтожаются, ибо въ этомъ только случаѣ разсматриваемыя функціи, какъ непрерывныя, могутъ измѣнять свой знакъ, и слѣдовательно только въ этомъ случаѣ можетъ произойти какое нибудь измѣненіе въ ряду знаковъ, отвѣчающихъ функціямъ (2).

46. И такъ, предположимъ сначала, что отъ вставки вмѣсто x величины a уничтожается одна только начальная функція $F(x)$, тогда какъ всѣ прочіе члены ряда (2) сохраняютъ конечное значеніе. Поставимъ въ функцію $F(x)$ двѣ величины $a-h$ и $a+h$ вмѣсто x, выбирая h такъ малымъ, чтобы въ промежуткѣ отъ $a-h$ до $a+h$ не уничтожалась ни одна изъ функцій ряда (2) кромѣ первой (*). Мы знаемъ, что *до своего уничтоженія начальная функція имѣетъ знакъ противный съ своею первою производною, послѣ уничтоженія — одинакій.*

Отсюда заключаемъ, что *каковы бы ни были знаки функцій* $F(a \pm h)$, $F'(a \pm h)$, ..., *при переходѣ* x *чрезъ значеніе* a, *въ весьма маломъ промежуткѣ отъ* $a-h$ *до* $a+h$, *въ ряду знаковъ отвѣчающихъ функціямъ* (2) *теряется всегда одна перемѣна.*

47. Предположимъ далѣе, что отъ вставки, вмѣсто x, величины a въ рядъ (2) уничтожается одна только средняя функція $F^{(n)}(x)$, тогда какъ всѣ прочія сохраняютъ конечное значеніе. Тогда, въ слѣдствіе того же свойства—что до своего уничтоженія функція $F^{(n)}(x)$ имѣетъ знакъ различный съ своею первою производной $F^{(n+1)}(x)$, а послѣ уничтоженія одинакій и выбравъ h такъ малымъ, чтобы въ промежуткѣ отъ $a-h$ до $a+h$ ни одинъ изъ членовъ ряда (2), кромѣ $F^{(n)}(x)$, не измѣнялъ своего знака,—мы очевидно будемъ имѣть четыре случая:

(*) Легко убѣдиться, что если непрерывная функція $\varphi(x)$ не уничтожается для какого нибудь значенія $x=a$, то всегда можно выбрать величину h такъ малою что функціи $\varphi(a-h)$ и $\varphi(a+h)$ будутъ имѣть тотъ же знакъ какъ и $\varphi(a)$. Для этаго должно только замѣтить, что въ разложеніи

$$\varphi(a \pm h) = \varphi(a) \pm h\,\varphi'(a) + h^2\,\varphi''(a) \pm \ldots\ldots$$

знакъ второй части зависитъ отъ знака перваго члена, если только h достаточно мало.

1-й Случай. $F^{(n-1)}(a) > 0$, $F^{(n+1)}(a) > 0$. Ряды знаковъ, отвѣчающихъ величинамъ $a-h$, a, $a+h$, будутъ:

	..... $F^{(n-1)}(x)$,	$F^{(n)}(x)$,	$F^{(n+1)}(x)$, ...
$(x=a-h)$	+	−	+ .....
$(x=a)$	+	0	+ .....
$(x=a)+h)$	+	+	+ .....

Очевидно, рядъ знаковъ отвѣчающихъ величинѣ $a-h$ имѣетъ двѣ перемѣны лишнихъ противъ ряда отвѣчающаго величинѣ $a+h$; а слѣдовательно при переходѣ x чрезъ значеніе a, въ весьма маломъ промежуткѣ отъ $a-h$ до $a+h$, рядъ знаковъ теряетъ *двѣ* перемѣны отъ уничтоженія функціи $F^{(n)}(x)$.

2-й Случай. $F^{(n-1)}(a) > 0$, $F^{(n+1)}(a) < 0$. Ряды знаковъ, отвѣчающихъ тѣмъ же величинамъ $a-h$, a, $a+h$, будутъ:

	.. .. $F^{(n-1)}(x)$,	$F^{(n)}(x)$,	$F^{(n+1)}(x)$, ...
$(x=a-h)$	+	+	− .....
$(x=a)$	+	0	− .....
$(x=a+h)$	+	−	− .....

А слѣдовательно число перемѣнъ знаковъ въ рядахъ отвѣчающихъ величинамъ $a-h$ и $a+h$ будетъ одинаково.

3-й Случай. $F^{(n-1)}(a) < 0$, $F^{(n+1)}(x) > 0$. Ряды знаковъ будутъ:

	..... $F^{(n-1)}(x)$,	$F^{(n)}(x)$,	$F^{(n+1)}(x)$ .....
$(x=a+h)$	−	−	+ .....
$(x=a)$	−	0	+ .....
$(x=a)$	−	+	+ .....

Откуда очевидно, что въ этомъ случаѣ, также какъ и въ предыдущемъ, число перемѣнъ знаковъ въ ряду (2) не увеличивается и не уменьшается.

4-й Случай. $F^{(n-1)}(a) < 0$, $F^{(n+1)}(a) < 0$. Въ этомъ случаѣ получимъ:

	$\ldots\ldots F^{(n+1)}(x)$,	$F^{(n)}(x)$,	$F^{(n+1)}(x) \ldots\ldots$
$(x = a - h) \ldots\ldots$	$-$	$+$	$-$ $\ldots\ldots$
$(x = a) \ldots\ldots$	$-$	0	$-$ $\ldots\ldots$
$(x = a + h) \ldots\ldots$	$-$	$-$	$-$ $\ldots\ldots$

Откуда ясно, что въ послѣднемъ ряду двумя перемѣнами меньше нежели въ первомъ.

И такъ, *если въ ряду (2) уничтожается одна изъ среднихъ функцій, для какого нибудь значенія перемѣнной* $x = a$, *то рядъ знаковъ отвѣчающихъ этимъ функціямъ теряетъ двѣ перемѣны, когда функціи сосѣднія съ уничтожающеюся имѣютъ одинакіе знаки, и потери перемѣнъ знаковъ не будетъ, когда сосѣднія съ уничтожающеюся функціею имѣютъ различные знаки.*

48. Наконецъ разсмотримъ тотъ случай, когда какое нибудь значеніе перемѣнной $x = a$ уничтожаетъ въ ряду (2) нѣсколько функцій сряду. Предположимъ, что число уничтожающихся функцій для $x=a$ будетъ i; первая уничтожающаяся функція пусть будетъ $F^{(n)}(a)$, послѣдняя $F^{n+i-1}(a)$, Что касается до функцій $F^{n-1}(a)$ и $F^{n+i}(a)$, то онѣ имѣютъ конечное значеніе съ какими угодно знаками. И здѣсь, чтобы судить объ исчезаніи перемѣнъ выберемъ h такъ малымъ, что въ промежуткѣ отъ $a - h$ до $a + h$ всѣ функціи ряда (2), кромѣ уничтожающихся, сохраняютъ свои знаки. Тогда очевидно:

$$F^{n+i-1}(a-h) = -h\,F^{n+i}(a) + \ldots\ldots,$$

$$F^{n+i-2}(a-h) = +\frac{h^2}{c}F^{n+i}(a) - \ldots\ldots,$$

$$F^{n+i-3}(a-h) = -\frac{h^3}{c}F^{n+i}(a) + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^n(a-h) = \pm \underset{c}{h^i} F^{n+i}(a) \pm \ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{n+i-1}(a+h) = h\,F^{n+i}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{n+i-2}(a+h) = \underset{c}{h^2} F^{n+1}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{n+i-3}(a+h) = \underset{c}{h^3} F^{n+i}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^n(a+h) = h^i F^{n+i}(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но, при h весьма маломъ, знакъ второй части въ этихъ уравненіяхъ зависитъ отъ знака перваго члена; а слѣдовательно всѣ функціи, уничтожающіяся для $x = a$, будутъ имѣть знакъ одинакій съ знакомъ $F^{n+i}(a)$ когда $x = a + h$, и онѣ будутъ имѣть знаки по перемѣнно различные и одинакіе съ знакомъ функціи $F^{n+i}(a)$, когда $x = a - h$. На основаніи этаго легко написать ряды знаковъ функцій (2) для трехъ значеній перемѣнной величины $x = a - h$, $x = a$, $x = a + h$. Для этаго, написавъ рядъ знаковъ отвѣчающихъ значенію $x = a$, для составленія ряда отвѣчающаго значенію $x = a + h$, должно подъ каждымъ нулемъ написать знакъ одинакій съ знакомъ функціи $F^{n+i}(a)$, а для составленія ряда отвѣчающаго значенію $x = a - h$, должно надъ каждымъ нулемъ писать по перемѣнно знаки + и −, начиная отъ правой руки, такъ чтобы надъ первымъ нулемъ съ правой стороны былъ знакъ различный съ знакомъ функціи $F^{n+i}(a)$.

Напримѣръ, если $F^{n+i}(a) > 0$, $F^{n-1}(a) > 0$ и i, число изчезающихъ функцій, четное, то ряды знаковъ, отвѣчающихъ величинамъ $a - h$, a, $a + h$, будутъ

	$\ldots F^{n-1}(x)$	$F^n(x)$	$F^{n+1}(x)$	$\ldots F^{n+i-2}(x)$	$F^{n+i-1}(x)$	$F^{n+i}(x)$	$\ldots$
$(x=a-h)$ $\ldots$	+	+	−	$\ldots$	+	−	+	$\ldots$
$(x=a)$ $\ldots\ldots$	+	0	0	$\ldots$	0	0	+	$\ldots$
$(x=a+h)$ $\ldots$	+	+	+	$\ldots$	+	+	+	$\ldots$

Откуда ясно, что число уничтожающихся перемѣнъ, при переходѣ x чрезъ значеніе a, равно i, числу изчезающихъ функцій.

Не трудно убѣдиться, что каковы бы нибыли знаки функцій $F^{n-1}(a)$ и $F^{n+i}(a)$, сосѣднихъ съ уничтожающимися, если только i число четное, всегда число изчезающихъ перемѣнъ будетъ равно числу уничтожающихся функцій.

Предположимъ теперь, что i число нечетное; здѣсь мы будемъ имѣть два случая — или функціи сосѣднія съ уничтожающимися для $x=a$ будутъ имѣть одинакіе знаки, или различные.

Пусть, напримѣръ, $F^{n-1}(a)>0$, $F^{n+i}(a)>0$; тогда ряды знаковъ, отвѣчающихъ величинамъ $x=a-h$, $x=a$, $x=a+h$, будутъ

	..... $F^{n-1}(x)$,	$F^n(x)$,	$F^{n+1}(x)$,	.... $F^{n+i-2}(x)$,	$F^{n+i-1}(x)$,	$F^{n+i}(x)$ ....
$x=a-h$).....	+	−	+	.... +	−	+ ....
$x=a$)	+	0	0	 0	0	+ ....
$x=a+h$).....	+	+	+	.... +	+	+ ....

Здѣсь знакъ $F^n(a-h)$ будетъ различный съ знакомъ $F^{n-1}(a-h)$, тогда какъ знаки $F^n(a+h)$ и $F^{n-1}(a+h)$ одинаковы, а слѣдовательно въ этомъ случаѣ число изчезающихъ перемѣнъ будетъ $i+1$. Къ тому же результату придемъ если предположимъ, что обѣ величины $F^{n-1}(a)$ и $F^{n+i}(a)$ отрицательны.

Наконецъ предположимъ, что знаки функцій, сосѣднихъ съ уничтожающимися для $x=a$, будутъ различны; напр. $F^{n+i}(a)<0$, $F^{n-1}(a)>0$. Незабывая, что i число нечетное, мы получимъ

	..... $F^{n-1}(x)$,	$F^n(x)$,	$F^{n+1}(x)$,	.... $F^{n+i-2}(x)$,	$F^{n+i-1}(x)$,	$F^{n+i}(x)$, ...
($x=a-h$).....	+	+	−	.... −	+	− ....
($x=a$).....	+	0	0	 0	0	− ....
($x=a+h$).....	+	−	−	.... −	−	− ....

Откуда ясно, что число изчезающихъ перемѣнъ въ этомъ случаѣ будетъ $i-1$, потому что постоянство знаковъ, отвѣчающихъ фун-

кціямъ $F^{n+1}(x)$, $F^n(x)$ въ первомъ ряду замѣнилось перемѣною въ послѣднемъ.

И такъ, если $x = a$ уничтожаетъ і сосѣднихъ функцій въ ряду (2), то, *при переходѣ x чрезъ это значеніе, въ ряду знаковъ теряется і перемѣнъ: если і число четное, если же і число не четное, то число теряющихся перемѣнъ будетъ $i+1$ или $i-1$* (смотря потому будутъ ли функціи сосѣднія съ уничтожающимися имѣть одинакіе или различные знаки).

Если въ числѣ уничгожающихся i функцій сряду будетъ и начальная $F(x)$, то число теряющихся перемѣнъ во всѣхъ случаяхъ будетъ i, въ чемъ легко убѣдиться, составивъ ряды знаковъ отвѣчающихъ величинамъ $a-h$, $a+h$. Случай этотъ, очевидно, можетъ встрѣтиться тогда, когда функція $F(x)$ имѣетъ корней равныхъ a.

49. Припоминая, предыдущее заключаемъ, что рядъ знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (2), по мѣрѣ увеличенія x отъ $-\infty$ до $+\infty$, постоянно мало по малу теряетъ перемѣны, никогда не пріобрѣтая новыхъ и не возвращая тѣхъ, которыя были потеряны; эта потеря перемѣнъ приходитъ двоякимъ образомъ, — или отъ *уничтоженія* начальной функціи $F(x)$, когда x переходитъ чрезъ дѣйствительный ея корень, причемъ теряется каждый разъ по одной перемѣнѣ, — или потеря происходитъ отъ уничтоженія среднихъ функцій и въ такомъ случаѣ теряется всегда четное число перемѣнъ.

50. Предположимъ теперь, что въ рядъ функцій (2) поставлены два числа a и $b > a$; не обращая вниманія на численное значеніе, опредѣлимъ только знаки результатовъ. Пусть число перемѣнъ въ ряду знаковъ отвѣчающихъ вставкѣ величины a будетъ k, число перемѣнъ въ ряду знаковъ, отвѣчающихъ величинѣ b, k'. Пусть $k - k' = r$; здѣсь можетъ быть три случая:

1-й Случай, $r = 0$. Тогда между границами a и b не можетъ быть ни одного корня уравненія $F(x) = 0$, ибо если бы такой корень былъ то при переходѣ перемѣнной x отъ a къ b, въ ряду знаковъ изчезла бы по крайней мѣрѣ одна перемѣна, а какъ изчезнувшія пере

мѣны не могутъ возратиться снова, то и слѣдовало бы заключить. что рядъ знаковъ отвѣчающій числу b имѣетъ менѣе перемѣнъ нежели рядъ отвѣчающій числу a.

2-й Случай, $r=1$. Тогда между границами a и b лежитъ одинъ дѣйствительный корень даннаго уравненія и не можетъ быть болѣе, потому что потеря одной перемѣны могла произойти только вслѣдствіе уничтоженія, между разсматриваемыми границами, функціи $F(x)$, притомъ эта функція не могла перейти черезъ нульное значеніе болѣе одного раза—иначе изчезло бы болѣе одной перемѣны.

3-й Случай, $r>1$. Здѣсь r можетъ быть число нечетное, тогда уррвненія $F(x)=0$ имѣетъ, между границами a и b, покрайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, но можетъ имѣть и больше и въ такомъ случаѣ всегда число нечетное, потому что отъ уничтоженія среднихъ функцій изчезнетъ всегда четное число перемѣнъ. Если же r число четное, то уравненіе $F(x)=0$, между разсматряваемыми границами, или можетъ имѣеть нѣсколько дѣйствительныхъ корней и въ такомъ случаѣ всегда число четное, или не имѣетъ ни одного дѣйствительнаго корня если потеря перемѣнъ произошла отъ уничтоженія среднихъ функцій.

И такъ, если $r>1$, то потеря перемѣнъ можетъ произойти или отъ уничтоженія начальной функціи, что отвѣчаетъ дѣйствительнымъ корнямъ даннаго уривненія, — или она можетъ произойти отъ уничтоженія среднихъ функцій, что очевидно отвѣчаетъ воображаемымъ корнямъ даннаго уравненія.

Главная заслуга Фурье состоитъ въ томъ, что онъ далъ способъ отличить эти случаи одинъ отъ другаго, если только данное уравненіе не имѣетъ равныхъ корней. Но очевидно этому условію мы всегда можемъ удовлетворить вычисляя равные корни, по теоремѣ Гудда, отдѣльно, т. е. отыскивая общаго большаго дѣлителя между функціею $F(x)$ и ея первою производною $F'(x)$.

51. Предположимъ, что данное уравненіе не имѣетъ равныхъ корней, и что $r=2$, — это самый простѣйшій случай, въ которомъ можетъ произойти сомнѣніе—указываетъ ли потеря пе-

ремѣнъ на два дѣйствительныхъ корня даннаго уравненія, или на два воображаемыхъ.

Допустимъ сначала, что разность между числомъ перемѣнъ знаковъ въ рядахъ (a) и (b) происходятъ только отъ знаковъ первыхъ двухъ функцій, начиная съ лѣвой стороны, такъ что, отбросивъ знаки этихъ функцій, мы получимъ, и въ ряду (a), и въ ряду (b) одинакое число перемѣнъ; пусть, напримѣръ, ряды (a) и (b) начинаются такими знаками:

	$F(x)$,	$F'(x)$,	$F''(x)$,	.....
(a)	+	−	+	.....
(b)	+	+	+	.....

прочіе же всѣ знаки совершенно одинаковы, какъ въ верхнемъ, такъ и въ нижнемъ ряду; слѣдовательно, если бы мы составили рядъ значеній r, отвѣчающихъ каждой функціи $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$... то этотъ рядъ былъ бы слѣдующій

	$F(x)$,	$F'(x)$,	F'',	.....
$r=$	2	1	0	.....,

откуда ясно, что функція $F'(x)$ между границами a и b имѣетъ непремѣнно одинъ дѣйствительный корень, функція же $F''(x)$ вовсе не имѣетъ корней между этими границами. И въ самомъ дѣлѣ, если отбросимъ въ обоихъ рядахъ (a) и (b) первые знаки, то увидимъ, что рядъ знаковъ (a) будетъ имѣть одною перемѣною больше ряда (b), а когда отбросимъ по два знака въ каждомъ ряду, то рядъ (a) будетъ имѣть столько же перемѣнъ, какъ и рядъ (b).

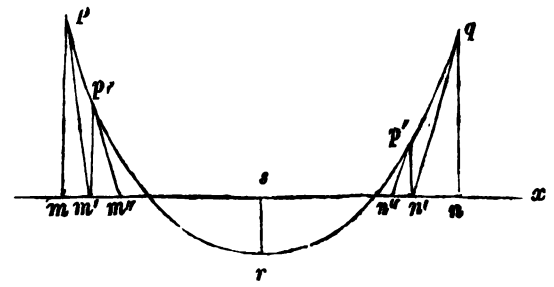
52. Толкуемъ свойство функцій $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ геометрически; пусть

$$y = F(x); \qquad (3)$$

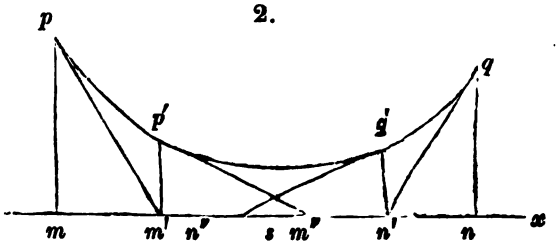
разсматриваемъ x и y какъ прямоугольныя координаты точки на плоскости, тогда уравненіе (3) будетъ представлять кривую линію и каждому дѣйствительному корню даннаго уравненія будетъ отвѣчать пересѣченіе этой кривой съ осью x-въ. Разсмотримъ часть кривой между границами $om = a$ и $on = b$.

Такъ какъ для $x = a$ и $x = b$, по предположенію, функція $F(x)$ положительна, то очевидно ордината кривой въ точкахъ m и n положителина; p и q будутъ точки на кривой имѣющія ординатами $F(a)$ и $F(b)$. Между границами a и b функція $F'(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень, а сдѣдовательно между точками p и q на кривой найдется одна точка, въ которой касательная паралельна оси x-въ. Сверхъ того, между границами a и b вторая производная $F''(x)$ остается постоянно положительною, слѣдовательно кривая между точками p и q не имѣетъ точекъ изгиба.

1.



2.



И такъ часть кривой между точками p и q можетъ имѣть видъ представленный на фигурахъ 1 или 2, смотря потому будетъ ли данное уравненіе, между границами a и b, имѣть оба корня дѣйствительные, или оба воображаемые. Для отличія того и другаго случая должно найти аналитическій признакъ, по которому можно бы было отличить 1 видъ кривой отъ 2.

53. Фурье даетъ для этаго слѣдующій способъ:

Въ точкахъ p и q проводимъ къ кривой касательныя, pm' и qn', которыя продолжаемъ до пересѣченія съ осью x-въ; въ m' и n' проводимъ ординаты $m'p'$ и $n'q'$ и въ точкахъ p' и q' — снова касательныя къ кривой $p'm''$ и $q'n''$, и т. д. Очевидно въ фигурѣ 2, послѣ одного или нѣсколькихъ построеній, непремѣнно достигнемъ

того, что сумма подкасательныхъ $mm' + nn'$ или $m'm'' + n'n''$, ... будетъ больше промежутка mn, или $m'n'$, ...; тогда какъ въ фигурѣ 1, эта сумма подкасательныхъ всегда будетъ меньше промежутка mn, или $m'n'$, ...

Такъ какъ

$$\operatorname{tg} qn'n = F'(b) \text{ и } \operatorname{tg} pm'm = -F'(a),$$

то очевидно

$$mm' = -\frac{F(a)}{F'(a)}, \qquad nn' = \frac{F(b)}{F'(b)}.$$

А слѣдовательно, если по численному значенію сумма

$$\frac{F(b)}{F'(b)} + \frac{F(b)}{-F'(b)} > b - a, \tag{4}$$

то потеря перемѣнъ въ ряду знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (2) указываетъ на два воображаемыхъ корня даннаго уравненія. Но если сумма

$$\frac{F(a)}{F'(a)} + \frac{F(a)}{-F'(a)} < b - a, \tag{5}$$

то изъ этаго еще нельзя заключить, что потеря перемѣнъ въ промежуткѣ отъ a до b указываетъ на два дѣйствительныхъ корня даннаго уравненія, это значитъ только, что границы a и b еще не достаточно сближены, чтобы можно было судить о природѣ корней. Въ этомъ случаѣ въ функцію $F(x)$ ставимъ, вмѣсто x, число c среднее между a и b; если знакъ $F(c)$ будетъ различенъ съ знаками $F(a)$ и $F(b)$, тогда очевидно оба корня дѣйствительные и одинъ изъ нихъ заключается между a и c, другой между c и b; если же знакъ $F(c)$ будетъ одинакій съ знаками $F(a)$ и $F(b)$, то границами корней избираемъ a и c, или c и b, смотря потому между которыми изъ этихъ чиселъ теряются обѣ перемѣны. Затѣмъ съ новыми границами поступаемъ также, какъ съ предыдущими, примѣняя къ нимъ неравенства (4) и (5). Послѣ одного, или нѣсколькихъ подобныхъ дѣйствій всегда достигнемъ того что природа корней будетъ непремѣнно опредѣлена и, въ случаѣ дѣй-

ствительныхъ корней, каждый изъ нихъ будетъ заключенъ въ извѣстныя границы.

54. Совершенно подобнымъ образомъ разсматривается и тотъ случай, когда ряды знаковъ при границахъ a и b начинаются такимъ образомъ:

	$F(x)$,	$F'(x)$,	$F''(x)$, ...
(a)	$-$	$+$	$-$ .....
(b)	$-$	$-$	$-$ ..... ;

и здѣсь признакъ воображаемыхъ корней остается одинъ и тотъ же (4); все различіе будетъ состоять въ томъ, что здѣсь кривая $y = F(x)$, между границами a и b, такъ расположена въ отрицательной сторонѣ ординатъ какъ въ предыдущемъ случаѣ она расположена въ положительной.

55. Мы предположили, что между границами a и b теряется только двѣ перемѣны и что знаки обоихъ рядовъ (a) и (b), кромѣ первыхъ двухъ, совершенно одинаковы; но можетъ случиться, что между границами a и b теряется болѣе двухъ перемѣнъ и притомъ ряды знаковъ могутъ быть весьма разнообразны. Въ такомъ случаѣ находимъ значенія r для каждой функціи ряда (2); пишемъ эти значенія, которыя Фурье называетъ *указателями*, въ строку, каждый подъфункціей которой онъ соотвѣтствуетъ, потомъ въ ряду функцій ищемъ такія три, которымъ отвѣчаютъ указатели

2, 1, 0

и примѣняемъ къ нимъ неравенства (4) и (5). Пусть напримѣръ эти функціи будутъ $F^{(n)}(x)$, $F^{(n+1)}(x)$, $F^{(n+2)}(x)$. Если функція $F^{(n)}(x)$ между разсматриваемыми границами имѣемъ оба корня воображаемые, то это значитъ, что въ ряду знаковъ потеря *двухъ* перемѣнъ произошла отъ уничтоженія средней функціи $F^{(n+1)}(x)$ и что, слѣдовательно, начальная функція имѣетъ, между этими границами, два воображаемыхъ корня. Тогда изъ цѣлаго ряда указателей вычитаемъ число 2 и полученный такимъ образомъ новый рядъ указателей разсматриваемъ точно также какъ и пре-

дыдущій. Если же оба корня функціи $F^{(n)}(x)$ дѣйствительные, то вставкою средняго числа, раздѣляющаго эти корни, промежутокъ между разсматриваемыми границами разбивается на два другихъ и ряды указателей уже разсматриваются въ этихъ послѣднихъ. Для бо́льшихъ подробностей отсылаемъ къ оригинальному сочиненію Фурье — *Analyse des équations déterminées.*

56. Узнать природу корней на которые указываетъ потеря перемѣнъ знаковъ въ ряду (2) можно, пользуясь способомъ непреревныхъ дробей, который далъ Лагранжъ для вычисленія корней. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ ряду знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (2) теряется двѣ перемѣны между границами a и b. Во первыхъ сближаемъ границы a и b до тѣхъ поръ пока разность между ними не будетъ превышать единицы, тогда, полагая $a < b$, въ данное уравненіе

$$F(x) = 0$$

ставимъ $a + \frac{1}{y}$ вмѣсто x. Если преобразованное уравненіе

$$\varphi(y) = 0$$

имѣетъ дѣйствительные корни *бо́льшіе* единицы, тогда очевидно оба корня даннаго уравненія лежащіе между границами a и b будутъ дѣйствительные. Чтобы отдѣлить эти корни, ищемъ, по способу Фурье, между какими границами лежатъ корни уравненія $\varphi(y)=0$ большіе единицы; при помощи ихъ мы легко найдемъ и границы корней даннаго уравненія, Если уравненіе $\varphi(y) = 0$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней большихъ единицы, тогда между границами a и b данное уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ коней, и потеря перемѣнъ знаковъ указываетъ на присутствіе корней воображаемыхъ.

57. Прежде чѣмъ приступимъ къ вычисленію дѣйствительныхъ корней по способу Фурье, скажемъ нѣсколько словъ о слѣдствіяхъ вытекающихъ изъ свойствъ ряда функцій

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ldots\ F^{(m-1)}(x),\ F^{(m)}(x) \qquad (2)$$

1. Если всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные, то разность между числомъ перемѣнъ знаковъ въ результатахъ вставки двухъ чиселъ a и b, въ рядъ (2) вмѣсто x, указываетъ на число дѣйствительныхъ корней уравненія $F(x) = 0$ между границами a и b; какъ это слѣдуетъ и изъ способа Бюдана.

2. Если каждый разъ, при уничтоженіи среднихъ функцій, двѣ сосѣднія съ уничтожающеюся имѣютъ различные знаки, тогда данное уравненіе не имѣетъ воображаемыхъ корней, ибо въ этомъ случаѣ въ ряду знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (2) не можетъ уничтожиться ни одной перемѣны отъ уничтоженія среднихъ функцій.

Теорема эта была дана *De Gua* въ 1741 году; ее можно выразить такимъ образомъ: *Данное уравненіе* $F(x) = 0$ *не имѣетъ воображаемыхъ корней 1) если результатъ исключенія* x *изъ уравненій*

$$F(x).\ F''(x) = y,\ F'(x) = 0$$

не будетъ давать положительныхъ дѣйствительныхъ значеній для y *или иначе, если въ этомъ результатѣ всѣ коэффиціенты при* y *будутъ числа положительныя (см. Декартово правило знаковъ)*

2) Результатъ исключенія x *изъ уравненій*

$$F'(x).\ F'''(x) = y,\ F''(x) = 0$$

также долженъ имѣть всѣ коэффиціенты при y *положительные и т. д.*

Наконецъ результатъ исключенія x *изъ уравненій*

$$F^{(m-2)}(x).\ F^{(m)}(x) = y,\ F^{(m-1)}(x) = 0$$

долженъ имѣть всѣ коэффиціенты положительные.

Если хотя одно изъ этихъ условій не выполнено, то данное уравненіе необходимо имѣетъ воображаемые корни, ибо тогда въ ряду знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (2) изчезнетъ хотя двѣ перемѣны отъ уничтоженія средней функціи. При этомъ очевидно

предполагается, что въ ряду (2) не могутъ уничтожиться нѣсколько функцій сряду.

3. *Декартово правило знаковъ.* Въ данномъ алгебраическомъ уравненіи число положительныхъ дѣйствительныхъ корней не можетъ быть больше числа перемѣнъ знаковъ, которые представляютъ коеффиціенты уравненія, а число отрицательныхъ корней не можетъ быть больше числа послѣдовательностей знаковъ при этихъ коеффиціентахъ. Доказательство этаго мы уже видѣли.

4. Если въ данномъ алгебраическомъ уравненіи недостаетъ одного или нѣсколькихъ среднихъ членовъ, притомъ члены сосѣдніе съ недостающимъ имѣютъ одинакіе знаки, то уравненіе необходимо имѣетъ воображаемые корни. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ вставка нуля вмѣсто x въ ряду функцій (2) уничтожаетъ одну или нѣсколько среднихъ функцій, въ то время когда сосѣднія съ уничтожающеюся имѣютъ одинакіе знаки, и слѣдовательно въ ряду знаковъ, отвѣчающихъ этимъ функціямъ, изчезнутъ перемѣны отъ уничтоженія среднихъ функцій, когда x переходитъ чрезъ нульное значеніе.

5. Самое меньшее изъ положительныхъ чиселъ, которыя всѣмъ функціямъ ряда (2) доставляютъ положительныя значенія, будетъ верхнею т. е. большею границею положительныхъ корней даннаго уравненія. Ибо, если $x = a$ доставляетъ всѣмъ функціямъ ряда (2) положительныя значенія, то въ промежуткѣ отъ a до $+\infty$ не можетъ быть ни одного корня даннаго уравненія. Такой способъ находить верхнюю границу положительныхъ корней принадлежитъ Ньютону.

B. *Вычисленіе дѣйствительныхъ корней.*

58. Опредѣливъ границы между которыми находится каждый дѣйствительный корень даннаго уравненія, вотъ какимъ образомъ Фурье вычисляетъ значеніе этихъ корней съ какою угодно точностію.

Пусть a и b тѣ границы, между которыми лежитъ корень уравненія x_1; присутствіе этаго корня узнается потому, что вставивъ въ рядъ функцій

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ldots\ F^{(m+1)}(x),\ F^{(m)}(x) \qquad (2)$$

вмѣсто x числа a и b, мы получаемъ два ряда знаковъ, разность между числомъ перемѣнъ которыхъ равна единицѣ.

Во первыхъ сближаемъ границы a и b такимъ образомъ, чтобы отбросивъ знаки отвѣчающіе функціи $F(x)$, мы получили въ обоихъ рядахъ (a) и (b) совершенно одинакіе знаки. Этаго очевидно всегда можно достигнуть если функція $F(x)$ не имѣетъ общихъ корней ни съ одною изъ своихъ производныхъ. Для слѣдующаго вычисленія достаточно впрочемъ чтобы функція $F(x)$ не имѣла общихъ корней съ первыми тремя изъ своихъ производныхъ. (Если такіе корни есть, то они должны быть отдѣлены предварительно, отыскивая общаго наибольшаго дѣлителя между функціею $F(x)$ и ея первыми производными).

59. Предположимъ, что границы a и b удовлетворяютъ требуемому условію, тогда очевидно, что между этими границами нѣтъ ни одного корня функцій $F'(x)$ и $F''(x)$. Пусть напримѣръ ряды знаковъ отвѣчающихъ числамъ a и b будутъ такіе:

	$F(x)$,	$F'(x)$,	$F''(x)$,	$F'''(x)$,	.....
(a)	−	+	+	+	.....
(b)	+	+	+	+	.....

Назовемъ β то число, которое должно отнять отъ верхней границы b чтобы получить истинное значеніе искомаго корня x_1; тогда $x_1 = b - \beta$, и слѣдовательно

$$F(b-\beta) = 0,$$

или

$$F(b) - \beta F'(b-\beta, b) = 0;$$

гдѣ $F'(b-\beta, b)$ называемъ среднее не извѣстное значеніе функ-

ціи $F'(x)$ между границами для перемѣнной $b-\beta$ и b. Изъ этаго уравненія находимъ

$$\beta = -\frac{F(b)}{F'(b-\beta, b)};$$

а слѣдовательно истинное значеніе искомаго корня x_1 будетъ

$$x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b-\beta, b)}.$$

Незная того средняго значенія функціи $F'(x)$, которое мы означили $F'(b-\beta, b)$, мы не можемъ по этой формулѣ вычислить истинное значеніе корня x_1; но мы можемъ найти, вмѣсто b, границу болѣе близкую къ этому корню. Въ самомъ дѣлѣ, функція $F'(x)$ по предположенію остается постоянно положительною между границами для перемѣнной a и b; а слѣдовательно $F'(x)$, между тѣми же границами, постоянно возрастаетъ отъ самаго меньшаго значенія $F'(a)$ до самаго большаго $F'(b)$, и потому если въ предыдущей формулѣ, вмѣсто $F'(b-\beta, b)$ возмемъ $F'(b)$, то очевидно дробь $\frac{F(b)}{F'(b)}$ будетъ меньше $\frac{F(b)}{F'(b-\beta_1 b)}$ и $x_1 < b - \frac{F(b)}{F'(b)}$, но вмѣстѣ съ тѣмъ $b - \frac{F(b)}{F'(b)} < b$; а слѣдовательно изъ границы b мы получили новую границу $b - \frac{F(b)}{F'(b)} = b'$, которая будетъ ближе къ искомому корню x_1.

60. Совершенно подобнымъ образомъ изъ границы a можно получить другую границу a', которая также будетъ ближе къ корню x_1. Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ α то число которое должно придать къ меньшей границѣ a чтобы получить истинное значеніе корня x_1. Тогда

$$F(a+\alpha) = 0$$

или

$$F(a) + \alpha F'(a, a+\alpha) = 0$$

гдѣ, подобно предыдущему, называемъ $F'(a, a+\alpha)$ среднее, но неизвѣстное значеніе функціи $F'(x)$ между границами для перемѣнной a и $a+\alpha$. Отсюда

$$\alpha = \frac{-F(a)}{F'(a, a+\alpha)}$$

и слѣдовательно истинное значеніе корня x_1 будетъ

$$x_1 = a + \frac{-F(a)}{F'(a, a+\alpha)}.$$

Теперь замѣчаемъ, что $F'(a)$ величина отрицательная, по предположенію, тогда какъ $F'(x)$ положительна для всѣхъ значеній x между границами a и b и притомъ постоянно возрастаетъ отъ самаго меньшаго значенія $F'(a)$ до самаго большаго $F'(b)$; слѣдовательно во второй части предыдущаго равенства къ величинѣ a придается положительное количество $\frac{-F(a)}{F'(a, a+\alpha)}$. А потому, если вмѣсто дроби $\frac{-F(a)}{F'(a, a+\alpha)}$ мы возмемъ дробь $\frac{-F(a)}{F(b)}$, то мы получимъ неравенство

$$x_1 > a + \frac{-F(a)}{F'(b)}$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ $a + \frac{-F(a)}{F'(b)} > a$. Такимъ образомъ отъ границы a мы перешли къ границѣ $a' = a + \frac{-F(a)}{F'(a)}$, которая будетъ ближе къ корню x_1. Отъ границъ a' и b' такимъ же образомъ можно перейти къ новымъ еще ближайшимъ границамъ a'' и b''; а взявъ за истинное значеніе корня одну изъ этихъ границъ, мы сдѣлаемъ ошибку менѣе разности между ними.

61. Сравнивая способъ Ньютона (*) для вычисленія корней съ способомъ, который мы изложили, легко замѣтить какія усовер-

(*) Смотри въ приложеніи — способъ Ньютона.

шенствованія сдѣлалъ въ этомъ способѣ Фурье. Въ самомъ дѣлѣ, если по данному первому приближенному значенію b корня x_1, для отысканія болѣе точнаго значенія b' будемъ пользоваться формулою

$$b' = b - \frac{F(b)}{F'(b)},$$

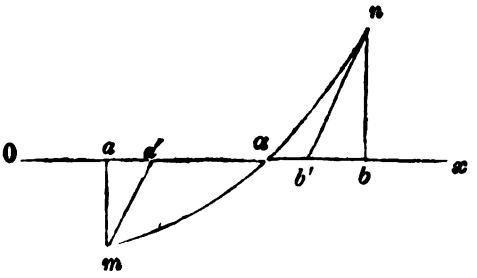
какъ этаго требуетъ способъ Ньютона, то, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, мы получимъ дѣйствительно болѣе близкое значеніе корня только тогда, когда граница b будетъ болѣе искомаго корня x_1, и когда функція $F'(x)$ отъ границы b до другой границы $b-\beta$ постоянно уменьшается для чего необходимо, чтобы между тѣми же границами вторая производная $F''(x)$ сохраняла постоянно свой знакъ. Если бы для примѣненія формулы Ньютона мы взяли нижнюю границу a, то новое найденное значеніе

$$a_1 = a + \frac{-F(a)}{F'(a)}$$

было бы больше x_1, ибо $\frac{-F(a)}{F'(a)} > \frac{-F(a)}{F'(a, a+\alpha)}$, и слѣдовательно мы вмѣсто нижней границы a' ближайшей къ искомому корню, получили бы верхнюю его границу, т. е. перешли бы чрезъ истинное значеніе этаго корня, и сверхъ того это было бы справедливо снова въ томъ только случаѣ, когда $F'(x)$ между границами a и $\alpha + a$ для перемѣнной величины, или постоянно возрастаетъ, или постоянно уменьшается; въ противномъ случаѣ, употребляя ту или другую границу, вмѣсто приближенія къ истинному значенію корня, мы будемъ напротивъ удаляться отъ него болѣе и болѣе.

62. Всего лучше видѣть эти особенности, построивъ кривую $y = F(x)$ между границами для абциссы a и b. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что границы a и b удовлетворяютъ тѣмъ условіямъ которыя отъ нихъ требуетъ Фурье для примѣненія способа Нью-

тона; тогда видъ кривой $y = F(x)$ отвѣчающій тому случаю который мы разсмотрѣли, между границами a и b, будетъ слѣдующій:



Здѣсь 0 начало координатъ, $0a = a$, $0b = b$, $0\alpha = x_1$; ma есть значеніе $F(x)$ при первой границѣ, nb при второй. Въ точкѣ n проведемъ касательную nb' до встрѣчи ея съ осью $0x$; тогда изъ треугольника nbb' получимъ

$$bb' = \frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Если эту длину вычтемъ изъ границы b, то найдемъ

$$0b' = b - \frac{F(b)}{F'(b)};$$

а слѣдовательно вторая найденная нами граница b' будетъ представлена на чертежѣ длиною $0b'$. Съ другой стороны, проведя изъ точки m прямую ma' параллельно nb', изъ подобныхъ треугольниковъ nbb' и maa' получимъ

$$aa' = \frac{-F(a)}{F'(b)}.$$

Придавая эту величину къ прежней границѣ $0a$, получимъ новую

$$0a' = a + \frac{-F(a)}{F'(b)}.$$

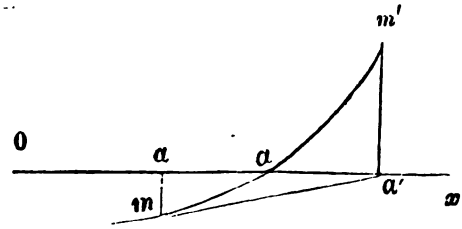
Изъ чертежа очевидно, что приближеніе къ истинному значенію корня въ этомъ случаѣ будетъ весьма быстрое.

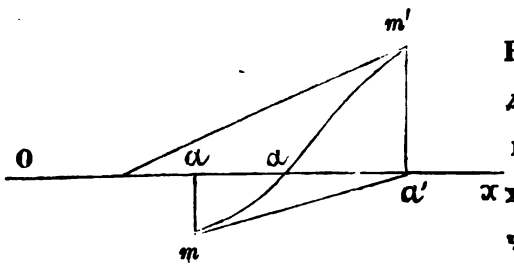
63. Если бы способъ Ньютона, для вычисленія болѣе точнаго значенія корня, примѣнили къ нижней границѣ a, т. е. по дан-

ному первому приближенному значенію a, для вычисленія новаго воспользовались формулою

$$0a' = a + \frac{-F(a)}{F'(a)}$$

то очевидно мы перешли бы черезъ истинное значеніе корня и получили новое значеніе корня $0a'$, которое можетъ, по численному значенію, можетъ даже дальше отстоять отъ искомаго корня. Для представленія на чертежѣ этаго новаго значенія, должно въ точкѣ m провести къ кривой касательную до встрѣчи съ осью x-въ. Если за точкою α кривая остается постоянно выпуклою къ оси x-овъ до точки m', то употребляя затѣмъ новое значеніе $0a'$ для примѣненія способа Ньютона, мы будемъ приближаться къ искомому корню такъ, какъ и въ способѣ Фурье.





Но если за точкою α, недоходя до точки m', кривая изъ выпуклой переходитъ въ вогнутую, причемъ вторая производная ординаты $F''(x)$ дѣлается равною нулю, то примѣняя къ значенію $0a'$ способъ Ньютона, для вычисленія болѣе точнаго значенія $0a''$, т. е. пользуясь формулою

$$0a'' = 0a' + \frac{-F(a')}{F'(a')},$$

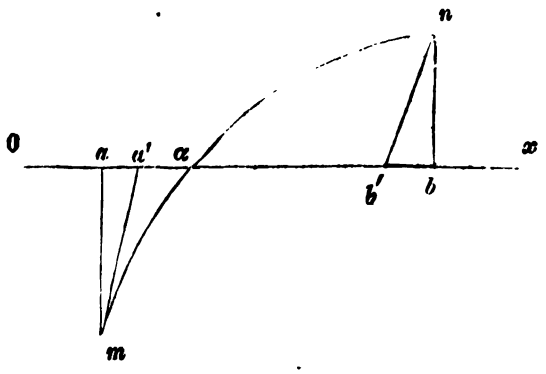
мы получимъ величину, которая снова будетъ меньше корня 0α,

и по численному значенію можетъ отстоять еще дальше отъ него. Вотъ почему для примѣненія способа Ньютона необходимо, чтобы между точками m и m' кривая изъ выпуклой не переходила въ вогнутую или наоборотъ, т. е. чтобы между границами $0a$ и $0b$ неуничтожалась ни первая, ни вторая производная функціи $F(x)$.

64. Если бы содержаніе дѣйствительнаго корня между границами a и b указывалъ такой случай знаковъ

	$F(x)$,	$F'(x)$,	$F''(x)$,	.....
(a)	−	+	−	.....
(b)	+	+	−	.....

гдѣ точками означены одинакіе знаки въ обоихъ рядахъ, тогда построивъ кривую между границами $0a$ и $0b$, мы получили бы слѣдующій видъ:



Откуда ясно, что формулы для вычисленія болѣе точныхъ значеній корня $0a'$ и $0b'$ въ этомъ случаѣ будутъ:

$$0a' = 0a + \frac{-F(a)}{F'(a)} \quad (m)$$

$$0b' = 0b + \frac{-F(b)}{F'(a)} \quad (n)$$

Изъ этаго слѣдуетъ, что формулу (m) должно употреблять

вообще для той границы, для которой $F(x)$ и $F''(x)$ имѣютъ одинакіе знаки а формулу (n) — для той, для которой $F(x)$ и $F''(x)$ имѣютъ различные знаки.

Прим. 1-й. Найдти корни уравненія

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Отв. Уравненіе это имѣетъ два корня воображаемыхъ и одинъ дѣйствительный $x = 2,\ 09455148\ \ldots\ldots$

Прим. 2-й. Уравненіе

$$x^3 + 2x - 11 = 0$$

имѣетъ два корня воображаемыхъ и одинъ дѣйствительный x=1,3262706...

Прим. 3-й. Найдти корни уравненія

$$x^4 - 6x^3 - 6x^4 + 3x + 2 = 0.$$

Отв.

$$x_1 = 3,3\ \ldots\ldots,\quad x_2 = 3,5\ \ldots\ldots$$
$$x_3 = -0,5\ .\ \ldots,\quad x_4 = -3,3\ \ldots\ldots$$

Прим. 4-й. Найдти корни уравненія

$$x^4 - 7x - 7 = 0$$

Отв.

$$x_1 = 1,35\ \ldots\ldots,\ x_2 = 1,69\ \ldots\ldots,\ x_3 = -3.049\ \ldots\ldots$$

СПОСОБЪ ГРЕФФЕ.

65. Способъ Греффе для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій въ практическомъ отношеніи имѣетъ неоспоримое преимущество предъ всѣми прочими, какъ по быстротѣ рѣшенія, не-требуя невыполнимаго счета въ случаѣ уравненій высокой степени, такъ и потому, что онъ даетъ возможность вычислить корни уравненія не только дѣйствительные, но и воображаемые, съ какою угодно точностію. Сверхъ того, способъ этотъ не требуетъ ни какихъ предварительныхъ преобразованій даннаго урав-

ненія, равные корни его могутъ быть вычислены вмѣстѣ съ прочими, не отдѣляя ихъ по способу общаго наибольшаго дѣлителя.

Что касается до теоретической части этаго способа, то простота его еще болѣе очевидна хотя эта часть и требуетъ довольно подробнаго развитія: весь способъ основанъ на составѣ коеффиціентовъ уравненія изъ его корней. Одинъ, по видимому, недостатокъ этаго способа состоитъ въ томъ, что онъ не даетъ двухъ границъ между которыми лежитъ искомый корень уравненія, а даетъ просто приближенное значеніе корня. Но этотъ недостатокъ уничтожается тѣмъ, что приближенное значеніе дается весьма точто, такъ что, измѣняя послѣднюю десятичную его цифру, всегда можно найдти двѣ границы для вычисляемаго корня.

Такое достоинство способа Греффе заставляетъ насъ изложить его съ возможно большею полнотою, — мы думаетъ, что всякій имѣющій надобность въ рѣшеніи численнаго алгебраическаго уравненія предпочтетъ этотъ способъ предъ всѣми прочими.

66. При изложеніи способа Греффе мы будемъ пользоваться статьею Энке »Ueber die allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen« (*).

Пользуясь извѣстнымъ свойствомъ цѣлой раціональной функціи съ дѣйствительными коеффиціентами — разлагаться на дѣйствительные множители первой или второй степени, Греффе основалъ свой способъ на слѣдующей теоремѣ:

По данному алгебраическому уравненію m-ой степени

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (1)$$

всегда можно составить другое уравненіе m-ой же степени

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + P_{m-1} x + P_m = 0\,; \qquad (2)$$

котораго корни будутъ какъ угодно большія степени корней даннаго уравненія и изъ коеффиціентовъ котораго $P_1\ P_2, \ldots\ P_m$, *весьма прос-*

(*) Crelle. Journ. für die reine und angew. Math. Band 22 1841.

тымъ вычисленіемъ, можно найдти первыя приближенныя значенія какъ дѣйствительныхъ такъ и воображаемыхъ корней даннаго уравненія.

Пусть уравненіе (1) разлагается на множители

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots\ldots (x + l) = 0; \qquad (3)$$

корнями этаго уравненія назовемъ *величины* $a, b, c, \ldots$ *съ ихъ знаками.* Разница, слѣдовательно, съ обыкновеннымъ названіемъ корня здѣсь будетъ только въ знакахъ; но въ настоящемъ случаѣ такое названіе для насъ удобнѣе относительно знаковъ при коэффиціентахъ уравненія, какъ это мы увидимъ впослѣдствіи.

Чтобы составить уравненіе (2) каковы бы ни были корни даннаго уравненія лучшій способъ будетъ слѣдующій: поставимъ въ уравненіе (3) $x^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто x; тогда получимъ:

$$(x^{\frac{1}{2}} + a)(x^{\frac{1}{2}} + b)(x^{\frac{1}{2}} + c) \ldots\ldots (x^{\frac{1}{2}} + l) = 0.$$

Уничтожая въ этомъ уравненіи дробныя степени x, получимъ

$$(x - a^2)(x - b^2)\, x - 0^2) \ldots\ldots (x - l^2) = 0,$$

или, перемѣняя знаки у всѣхъ коеффиціентовъ четнаго порядка, начиная съ коеффиціента высшей степени x,

$$(x + a^2)(x + b^2)(x + c^2) \ldots\ldots (x + l^2) = 0. \qquad (4)$$

Это уравненіе степени m-ой, какъ и данное, но корни его будутъ квадраты корней даннаго уравненія.

Очевидно, что если мы найдемъ возможность составить уравненіе (4), то отъ него можемъ перейти къ новымъ уравненіямъ которыхъ корни будутъ 4-я, 8-я, 16-я и вообще 2^n-я степени корней даннаго уравненія. Эти уравненія мы будемъ называть *производными уравненіями.*

67. Изъ предыдущаго видно, что для составленія перваго производнаго уравненія должно въ данное поставить $x^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто x и за тѣмъ уничтожить дробныя степени x. Но вставка $x^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто x даетъ

$$x^{\frac{m}{2}} + p_1 x^{\frac{m-2}{2}} + p_2 x^{\frac{m-2}{2}} + p_3 x^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + p_{m-1} x^{\frac{1}{2}} + p_m = 0;$$

а замѣчая, что если $p+q=0$, то и $p^2-q^2=0$, видимъ, что для уничтоженія дробныхъ степеней въ этомъ уравненіи, должно только первую его часть разбить на сумму двухъ членовъ которыхъ квадраты не содержали бы дробныхъ степеней x; тогда разность этихъ квадратовъ, послѣ упомянутой перемѣны знаковъ при коеффиціентахъ и приведетъ къ уравненію (4). По этому напишемъ предыдущее уравненіе такимъ образомъ

$$(x^{\frac{m}{2}} + p_2 x^{\frac{m-1}{2}} + p_4 x^{\frac{m-4}{2}} + \ldots\ldots\ldots)$$

$$+ (p_1 x^{\frac{m-1}{2}} + p_3 x^{\frac{m-3}{2}} + p_5 x^{\frac{m-5}{2}} + \ldots) = 0,$$

тогда получимъ

$$(x^{\frac{m}{2}} + p_2 x^{\frac{m-2}{2}} + p_4 x^{\frac{m-4}{2}} + \ldots\ldots)^2$$

$$- (p_1 x^{\frac{m-1}{2}} + p_3 x^{\frac{m-3}{2}} + p_5 x^{\frac{m-5}{2}} + \ldots)^2 = 0,$$

или

$$\left\{x^m + 2p_2 x^{m-1} + p_2^2 \left|\begin{matrix} + 2p_4 \end{matrix}\right| x^{m-2} + 2p_2 p_4 \left|\begin{matrix} + 2p_6 \end{matrix}\right| x^{m-3} + p_4^2 \left|\begin{matrix} + 2p_2 p_6 \\ + 2p_8 \end{matrix}\right| x^{m-4} + \ldots\ldots\right\} -$$

$$- \left\{p_1^2 x^{m-1} + 2p_1 p_3 x^{m-2} + p_3^2 \left|\begin{matrix} + 2p_1 p_5 \end{matrix}\right| x^{m-3} + 2p_3 p_5 \left|\begin{matrix} + 2p_1 p_7 \end{matrix}\right| x^{m-1} + \ldots\ldots\right\} = 0.$$

Наконецъ, вынося одинакія степени x общими множителями и

перемѣная знаки 2-го, 4-го, 6-го, и т. д. коэффиціентовъ начиная въ высшей степени x, получимъ:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x^m + p_1^2 & x^{m-1} + p_2^2 & x^{m-2} + p_3^2 & x^{m-3} + p_4^2 & x^{m-4} + \ldots = 0 \quad (4). \\ \quad - 2p_2 & \quad - 2p_1 p_3 & \quad - 2p_2 p_4 & \quad - 2p_3 p_5 & \\ & \quad + 2p_4 & \quad + 2p_1 p_5 & \quad + 2p_2 p_6 & \\ & & \quad - 2p_6 & \quad - 2p_1 p_7 & \\ & & & \quad + 2p_8 & \end{array}$$

Разсматривая это уравненіе видимъ, что законъ составленія коэффиціентовъ его очень простъ: коэффиціентъ степени x^{m-r} состоитъ изъ квадрата коэффиціента p_r при той же степени въ данномъ уравненіи и удвоенныхъ произведеній коэффиціентовъ стоящихъ по обѣ стороны въ равномъ растояніи отъ p_r, которыя берутся по перемѣнно съ знаками $-$ и $+$. Найдя въ числахъ коэффиціенты уравненія (4) и поступая съ нимъ, какъ поступали съ уравненіемъ даннымъ, получимъ новое, котораго корни будутъ 2^2 степени корней даннаго и т. д. Такимъ образомъ можемъ составить уравненіе (2), котораго корни будутъ какъ угодно большія степени корней даннаго уравненія.

68. Чтобы яснѣе представить вторую часть основной теоремы, мы должны разсмотрѣть отдѣльно случаи корней дѣйствительныхъ и случаи корней воображаемыхъ и за тѣмъ уже перейти къ общему случаю уравненій съ какими угодно корнями.

И такъ предположимъ сначала, что всѣ корни уравненія (1) дѣйствительные притомъ неравные между собою; назовемъ ихъ $a, b, c, d, \ldots\ldots l$ и предположимъ, что по численному значенію $a > b > c > d \ldots\ldots > l$. Тогда, по принятому опредѣленію корней, почнмъ

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots\ldots (x + b) = 0,$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned} p_1 &= a + b + c + d + \ldots\ldots + l, \\ p_2 &= ab + ac + \ldots\ldots + bc + bd + \ldots\ldots + kl, \end{aligned}$$

$$p_2 = abc + abd + \ldots\ldots + bdc + \ldots\ldots + ghl,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_m = abcd \ldots\ldots l;$$

$$P_1 = a^n + b^n + c^n + \ldots\ldots + l^n$$

$$P_2 = a^n b^n + a^n c^n + \ldots\ldots + b^n c^n + \ldots + k^n l^n,$$

$$P_3 = a^n b^n c^n + a^n b^n d^n + \ldots\ldots + b^n c^n d^n + \ldots + g^n k^n l^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_m = a^n b^n c^n \ldots\ldots l^n.$$

Отсюда очевидно, что когда n, показатель степени корней, достаточно великъ, то въ коеффиціентахъ P_1, P_2, P_3, ... первый членъ будетъ болѣе суммы всѣхъ прочихъ членовъ, такъ что, для перваго приближенія, мы можемъ принять

$$P_1 = a^n, \quad P_2 = a^n b^n, \quad P_3 = a^n b^n c^n, \ldots\ldots P_m = a^n b^n c^n \ldots\ldots l^n,$$

слѣдовательно

$$P_1 = a^n, \quad \frac{P_2}{P_1} = b^n, \quad \frac{P_3}{P_2} = c^n, \ldots\ldots \frac{P_m}{P_{m-1}} = l^n.$$

Точность приближенія можетъ быть доведена до какой угодно степени, но мы первое приближеніе будемъ ограничивать только вѣроятною ошибкою менѣе $\frac{1}{100000}$.

69. Предположимъ, что вмѣсто коеффиціентовъ P_1, P_2 .... мы вычислили ихъ логариѳмы Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_m. Мы увидимъ впослѣдствіи, что только при употребленіи логариѳмическаго счета и можно достигнуть простоты въ примѣненіи способа Греффе.

Пусть

$$x^m + Q_1 x^{m-1} + Q_2 x^{m-2} + Q_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + Q_m = 0 \qquad (5).$$

И предположимъ, что при переходѣ къ слѣдующему производному уравненію, удвоенныя произведенія сосѣднихъ съ вычисляемымъ коеффиціентовъ уже не имѣютъ вліянія на логариѳмическій

счетъ съ пятью десятичными знаками, такъ что $\log P_r^2 = \log (P_r^2 - 2P_{r-1}\ P_{r+1} + \cdots)$; соотвѣтственныя числа коеффиціентовъ слѣдующаго производнаго уравненія должны быть равны P_1^2, P_2^2, P_3^2 ..... P_m^2 и

$$P_1 = a^n,\ P_2 = a^n b^n,\ P_3 = a^n b^n c^n \ldots\ldots (a)$$

съ вѣроятною ошибкою менѣе $\frac{1}{100000}$. Посмотримъ какъ великъ долженъ быть показатель n, чтобы эти условія были выполнены. Допустивъ равенства (a) видимъ, что соотвѣтственное число коеффиціента при x^{m-3}, напримѣръ, въ этомъ новомъ производномъ уравненіе будетъ

$$a^{2n}b^{2n}c^{2n} - 2a^{2n}b^{2n}c^n d^n + 2a^{2n}b^n c^n d^n e^n - 2a^n b^n c^n d^n e^n f^n.$$

Чтобы при вычисленіи помощію логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками, эта сумма была полнымъ квадратомъ отъ $a^n\ b^n c^n$ необходимо, чтобы члены ея, начиная со втораго, были менѣе $\frac{1}{100000}$ доли перваго члена. Но при нашемъ предположеніи относительно величины корней, самый большій членъ этой суммы, послѣ перваго, будетъ $2a^{2n}b^{2n}c^n d^n$, и какъ

$$\frac{a^{2n}b^{2n}c^{2n}}{2a^{2n}b^{2n}c^n d^n} = \frac{c^n}{2d^n},$$

то для выполненія требуемыхъ условій показатель n долженъ удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{c}{d}\right)^n > 200000, \text{ или } n > \frac{5{,}30103}{\log\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

Откуда видно, что еслибъ даже разность между всѣми корнями была менѣе $\frac{1}{10}$, то и тогда рѣдко придется брать $n > 2^3$, т. е. рѣдко бываетъ нужно болѣе 8 производныхъ уравненій.

70. И такъ признакъ по которому можно узнать, что степень приближенія для всѣхъ корней достигнута, состоитъ въ томъ, что при переходѣ отъ уравненія (5) къ слѣдующему, удвоенныя произведенія коеффиціентовъ сосѣднихъ къ вычисляемымъ не имѣютъ вліянія на логариѳмическій счетъ съ пятью десятичными знаками; тогда изъ уравненія (5), съ вѣроятною ошибкою менѣе $\frac{1}{100000}$, получимъ

$$Q_1 = \log a^n, \quad Q_2 - Q_1 = \log b^n, \quad Q_3 - Q_2 = \log c^n, \ldots\ldots$$

Прежде чѣмъ перейдемъ къ случаю корней воображаемыхъ, замѣтимъ, что если уравненіе (1) имѣетъ всѣ корни дѣйствительные, то уже въ уравненіи (4) всѣ коеффиціенты необходимо будутъ положительны, ибо оно имѣетъ своими корнями квадраты корней даннаго уравненія; и слѣдовательно если въ уравненіи (4) хотя одинъ изъ коеффиціентовъ отрицательный, то данное уравненіе необходимо имѣетъ воображаемые корни.

71. Предположимъ теперь, что данное уравненіе имѣетъ всѣ корни воображаемые и притомъ неравные между собою; разсмотримъ два изъ нихъ сопряженные между собою $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ и $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Полагая

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \mathrm{Cos}\,\varphi, \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \mathrm{Sin}\,\varphi \text{ и } \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = g,$$

получимъ множитель второй степени, отвѣчающій этимъ корнямъ въ данномъ уравненіи, вида $x^2 + fx + g^2$, гдѣ $f = 2g\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ и слѣдовательно

$$f < 2g.$$

Подобнымъ образомъ называя $g_1, g_2, g_3, \ldots g_{r-1}$ модули прочихъ воображаемыхъ корней и предполагая, что $g > g_1 > g_2 > \cdots > g_{r-1}$, данное уравненіе можемъ представить такимъ образомъ

$$(x^2 + fx + g^2)(x^2 + f_1x + g_1^2)(x^2 + f_2x + g_2^2) \ldots\ldots (x^2 + f_{r-1}x + g_{r-1}^2) = 0 \quad (6)$$

и слѣдовательно уравненіе это будетъ необходимо четной степени $2r$ и коэффиціенты его, называя ихъ $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{2r}$ составятся изъ величинъ f и g такимъ образомъ:

$$P_1 = f + f_1 + f_2 + \ldots + f_{r-1} = \Sigma f,$$

$$P_2 = g^2 + g_1^2 + g_2^2 + \ldots + g_{r-1}^2 + ff_1 + ff_2 + \ldots + f_1f_2 + f_1f_3 + \ldots$$
$$= \Sigma g^2 + \Sigma ff_1$$

$$P_3 = g^2 f_1 + g^2 f_2 + \ldots + g_1^2 f + g_1^2 f_2 + \ldots + g_{r-1}^2 f_{r-2} + ff_1f_2 + ff_1f_3 + \ldots$$
$$+ f_1f_2f_3 + \ldots = \Sigma g^2 f_1 + \Sigma ff_1f_2$$

$$P_4 = \Sigma g^2 g_1^2 + \Sigma g^2 f_1 f_2 + \Sigma ff_1 f_2 f_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{2r-2} = \Sigma g^2 g_1^2 g_2^2 \ldots g_{r-2}^2 + \Sigma g^2 g_1^2 \ldots g_{r-3}^2 f_{r-2} f_{r-1}$$

$$P_{2r-1} = \Sigma g^2 g_1^2 g_2^2 \ldots g_{r-2}^2 f_{r-1}$$

$$P_{2r} = g^2 g_1^2 g_2^2 \ldots g_{r-1}^2.$$

Во всѣхъ этихъ коеффиціентахъ величины $f, f_1, f_2 \ldots$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$f < 2g, \; f_1 < 2g_1, \; f_2 < 2g_2, \ldots\ldots$$

72. Переходя теперь къ уравненію котораго корни n-ыя степени корней даннаго уравненія, получимъ

$$x^{2r} + P_1 x^{2r-1} + P_2 x^{2r-2} + \ldots + P_{2r-1} x + P_{2r} = 0, \qquad (2)$$

гдѣ

$$P_1 = \Sigma f_1^{(n)},$$

$$P_2 = \Sigma g^{2n} + \Sigma f^{(n)} f_1^{(n)},$$

$$P_3 = \Sigma g^{2n} f_1^{(n)} + \Sigma f^{(n)} f_1^{(n)} f_2^{(n)},$$

$$P_4 = \Sigma g^{2n} g_1^{2n} + \Sigma g^{2n} f_1^{(n)} f_2^{(n)} + \Sigma f^{(n)} f_1^{(n)} f_2^{(n)} f_3^{(n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{2r-1} = \Sigma g^{2n}_{1}\, g^{2n}_{1} \ldots g^{2n}_{r-2} + \Sigma g^{2n}_{1}\, g^{2n}_{1} \ldots g^{2n}_{r-2} f^{(n)}_{r-1} f^{(n)}_{r-1},$$

$$P_{2r-1} = \Sigma g^{2n}_{1}\, g^{2n}_{1} \ldots g^{2n}_{r-2} f^{(n)}_{r-1},$$

$$P_{2r} = g^{2n}_{1} g^{2n}_{2} g^{2n}_{r-1} \ldots g^{2n}_{r-1};$$

притомъ

$$f^{(n)} = 2g^{n} \operatorname{Cos} n\varphi,\quad f^{(n)}_{1} = 2g^{n}_{1} \operatorname{Cos} n\varphi_{1},\quad f^{(n)}_{2} = 2g^{n}_{2} \operatorname{Cos} n\varphi_{2}, \ldots\ldots (a).$$

Слѣдовательно въ коеффиціентахъ P_1, P_2, ... величины $f^{(n)}$ $f^{(n)}_{1}$, $f^{(n)}_{2}$ ..... никогда не могутъ превышать, по численному своему значенію, соотвѣтственныхъ величинъ $2g^n$, $2g^n_1$, $2g^n_2$, ...

73. Разсматривая коеффиціенты P_1, P_2, P_3, ... видимъ, что тѣ изъ нихъ, которые относятся къ четнымъ степенямъ x, содержатъ члены въ которыхъ не войдутъ f и легко убѣдится, что съ увеличеніемъ n коеффиціенты эти постепенно приближаются къ опредѣленнымъ предѣламъ. Въ самомъ дѣлѣ разсмотримъ, напримѣръ, коеффиціентъ

$$P_4 = \Sigma g^{2n}_{1}\, g^{2n}_{1} + \Sigma g^{2n}_{1}\, f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{2} + \Sigma f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{2} f^{(n)}_{2}$$

Въ немъ сумма $\Sigma g^{2n}_{1}\, f^{n}_{1}\, f^{n}_{2}$ никогда не можетъ превышать, по численному значенію, суммы $\Sigma g^{2n}_{1}\, 2g^{n}_{1}\, 2g^{n}_{2}$, которая получается изъ предыдущей, если въ нее вмѣсто каждой величины f_1 поставимъ крайнюю наибольшую ея границу $2g^n$; подобнымъ образомъ сумма $\Sigma f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{2} f^{(n)}_{3}$ не можетъ превышать $\Sigma 2g^{n}_{1} \cdot 2g^{n}_{1}\, 2g^{n}_{2} \cdot 2g^{n}_{3}$. Но, съ увеличеніемъ n, сумма $\Sigma g^{2n}_{1} \cdot 2g^{n}_{1}\, 2g^{n}_{2}$, вслѣдствіе относительной величины $g, g_1, g_2, \ldots$ приближается къ предѣлу $g^{2n}_{1} \cdot 2g^{n}_{1} \cdot 2g^{n}_{2}$, который очевидно не можетъ быть менѣе предѣла суммы $\Sigma g^{2n}_{1} f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{2}$. Точно также и сумма $\Sigma f^{(n)}_{1} f^{(n)}_{2} f^{(n)}_{3}$ не можетъ превышать, когда n неопредѣленно возрастаетъ, предѣла суммы $\Sigma 2g^{n}_{1}\, 2g^{n}_{2}\, 2g^{n}_{3}$,

то есть $2g^n \cdot 2g_1^n \cdot 2g_2^n \cdot 2g_3^n$. И такъ послѣдніе два члена коэффиціента P_4 не могутъ, при предѣлѣ, превышать суммы

$$g^{2n}\, 2g_1^n\, 2g_2^n + 2g^n\, 2g_1^n\, 2g_2^n\, 2g_3^n.$$

Съ другой стороны, первый членъ коэффиціента P_4 или $\Sigma g^{2n} g_1^{2n}$ имѣетъ своимъ предѣломъ $g^{2n} g_1^{2n}$; сверхъ того при n достаточно большомъ

$$g^{2n} g_1^{2n} > g^{2n}\, 2g_1^n\, 2g_2^n > 2g^n\, 2g_1^n\, 2g_2^n\, 2g_3^n,$$

ибо для выполненія этихъ условій должно чтобы было

$$g_1^{2n} > 2g_1^n\, 2g_2^n \quad \text{и} \quad g^{2n} > 2g^n\, 2g_3^n,$$

или

$$g_1 > g_2 \sqrt[n]{4} \quad \text{и} \quad g > g_3 \sqrt[n]{4},$$

а эти неравенства всегда могутъ быть удовлетворены когда n достаточно велико.

А слѣдовательно при достаточно большомъ n, за первое приближенное значеніе коэффиціента P_4 можно принять $g^{2n} g_1^{2n}$.

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что коэффиціентъ P_2 имѣетъ своимъ предѣломъ g^{2n}, коэффиціентъ P_6 имѣетъ предѣломъ $g^{2n} g_1^{2n} g_2^{2n}$ и т. д.

Что касается до коэффиціентовъ P_1, P_3, P_5, ... относящихся къ нечетнымъ степенямъ x, то они, не имѣя ни одного члена независящаго отъ $f^{(n)}$, $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$, ... очевидно не будутъ, съ увеличеніемъ n, приближаться ни къ какому опредѣленному предѣлу, будутъ часто даже мѣнять знакъ, переходя изъ положительныхъ въ отрицательные и наоборотъ, потому что величины f, опредѣляемыя уравненіями (a) могутъ принимать какъ угодно малыя положительныя или отрицательныя значенія, только не превышающія соотвѣтственныхъ значеній $2g^n$. Можетъ только слу-

чится, что нѣкоторыя изъ значеній f, при увеличеніи n, сдѣлаются равными своему крайнему предѣлу $2g^n$, тогда очевидно это равенство сохранится и при дальнѣйшемъ увеличеніи n и случай этотъ будетъ отвѣчать случаю корней равныхъ; но о равныхъ корняхъ мы будемъ говорить впослѣдствіи.

74. И такъ если данное уравненіе имѣетъ всѣ корни воображаемые, то переходя отъ него къ уравненію котораго корни n-ыя степени корней даннаго, для перваго приближенія получимъ

$$x^{2r} + f_0 x^{2r-1} + g^{2n} x^{2r-2} + f'_0 x^{2r-3} + g^{2n} g_1^{2n} x^{2r-4} + f''_0 x^{2r-5} + g^{2n} g_1^{2n} g_2^{2n} x^{2r-6} + \ldots\ldots = 0 \qquad (8)$$

гдѣ f_0, f'_0, f''_0 ..... означаютъ неопредѣленныя величины коэффиціентовъ P_1, P_3, P_5, ... Или, употребляя логариѳмическій счетъ,

$$x^{2r} + t_0 x^{2r-1} + Q_2 x^{2r-2} + t'_0 x^{2r-3} + Q_4 x^{2r-4} + \ldots\ldots = 0, \qquad (9)$$

гдѣ t_0, Q_2, t'_0, Q_4, ... означаютъ логариѳмы коэффиціентовъ уравненія (8).

Если n уже такъ велико, что при переходѣ къ слѣдующему производному уравненію, удвоенныя произведенія членовъ сосѣднихъ съ Q_2, Q_4, Q_6, ... не имѣютъ вліянія на логариѳмическій счетъ, ограничивая его какъ и прежде пятью десятичными знаками, то, съ вѣроятною погрѣшностію менѣе $\frac{1}{100000}$, получимъ

$$Q_2 = \log g^{2n}, \quad Q_4 - Q_2 = \log g_1^{2n}, \quad Q_6 - Q_3 = \log g_2^{2n}, \ldots.$$

Такимъ образомъ изъ уравненія (9) могутъ быть весьма просто найдены первыя приближенныя значенія модулей воображаемыхъ корней и, для окончательнаго рѣшенія задачи, останется только найдти соотвѣтствующія этимъ модулямъ значенія величинъ f, f_1, f_2...

75. Съ этою цѣлью замѣчаемъ, что если данное уравненіе разобьемъ на множители второй степени вида

$$x^2 + tx + v,$$

то каковы бы ни были корни уравненія, будутъ ли они дѣйствительные или воображаемые, каждый такой множитель можетъ быть представленъ произведеніемъ

$$(x + gy)\left(x + \frac{g}{y}\right),$$

полагая $t = g\left(y + \frac{1}{y}\right)$ и $\sqrt{v} = g$. А слѣдовательно данному уравненію

$$x^{2r} + p_1 x^{2r-2} + \ldots\ldots + p_{2r-1} x + p_{2r} = 0$$

должны удовлетворить значенія $x = -gy$, $x = -\frac{g}{y}$; т. е. мы должны имѣть

$$g^{2r} y^{2r} - p_1 g^{2r-1} y^{2r-1} + p_2 g^{2r-2} y^{2r-2} - \ldots\ldots + p_{2r-2} g^2 y^2 - p_{2r-1} gy + p_{2r} = 0.$$

$$g^{2r} y^{-2r} - p_1 g^{2r-1} y^{-(2r-1)} + p_2 g^{2r-2} y^{-(2r-2)} \ldots\ldots + p_{2r-2} g^2 y^{-2} - p^{2r-1} g y^{-1} + p_{2r} = 0,$$

Помножая первое изъ этихъ уравненій на $g^{-2r} y^{-r}$, второе на $g^{-2r} y^r$ и складывая ихъ, получимъ

$$(y^r + y^{-r}) - p_1 g^{-1} (y^{r-1} + y^{-(r-1)}) + p_2 g^{-2} (y^{r-2} + y^{-(r-2)}) - \ldots\ldots$$
$$+ p_{2r-2} g^{-(2r-2)} (y^{r-2} + y^{-(r-2)}) - p_{2r-1} g^{-(2r-1)} (y^{r-1} + y^{-(r-1)})$$
$$+ p_{2r} g^{-2r} (y^r + y^{-r}) = 0;$$

а если, при томъ же помноженіи, одно уравненіе изъ другаго вычтемъ, то получимъ

$$(y^r - y^{-r}) - p_1 g^{-1} (y^{r-1} - y^{-(r-1)}) + p_2 g^{-2} (y^{r-2} - y^{-(r-2)}) - \ldots\ldots$$
$$- p_{2r-2} g^{-(2r-2)} (y^{r-2} - y^{-(r-2)}) + p_{2r-1} g^{-(2r-1)} (y^{r-1} - y^{-(r-1)})$$
$$- p_{2r} g^{-2r} (y^r - y^{-r}) = 0.$$

Въ этихъ уравненіяхъ члены стоящіе въ равномъ разстояніи отъ концевъ содержатъ одинакія степени y; а потому, полагая

$$\left.\begin{array}{ll} p + p_{2r}g^{-2r} = \beta_0 & 1 - p_{2r}g^{-2r} = \gamma_0 \\ p_1 + p_{2r-1}g^{-(2r-2)} = \beta_1 & p_1 - p_{2r-1}g^{-(2r-2)} = \gamma_1 \\ p_2 + p_{2r-2}g^{-(2r-4)} = \beta_2 & p_2 - p_{2r-2}\,g^{-(2r-4)} = \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2p_r = \beta_r & p_{r-1} - p_{r+1}\,g^{-2} = \gamma_{r-1} \end{array}\right\} \quad (10),$$

получимъ

$$\left.\begin{array}{l} \beta_0 (y^r + y^{-r}) - \dfrac{\beta_1}{g}(y^{r-1} + y^{-(r-1)}) + \dfrac{\beta_2}{g^2}(y^{r-2} + y^{-(r-2)}) - \cdots\cdots \\ \qquad \pm \dfrac{\beta_{r-1}}{g^{r-1}}(y + y^{-1}) \mp \dfrac{\beta_r}{g^r} = 0, \\ \gamma_0 (y^r - y^{-r}) - \dfrac{\gamma_1}{g}(y^{r-1} - y^{-(r-1)}) + \dfrac{\gamma_2}{g^2}(y^{r-2} - y^{-(r-2)}) - \cdots\cdots \\ \qquad \pm \dfrac{\gamma_{r-1}}{g^{r-1}}(y - y^{-1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (11).$$

Но легко видѣть, что

$$y^r + y^{-r} = (y + y^{-1})(y^{r-1} + y^{-(r-1)}) - (y^{r-2} + y^{-(r-2)})$$

и

$$\frac{y^r - y^{-r}}{y - y^{-1}} = (y + y^{-1})\left(\frac{y^{r-1} - y^{-(r-1)}}{y - y^{-1}}\right) - \left(\frac{y^{r-2} - y^{-(r-2)}}{y - y^{-1}}\right),$$

а потому, пользуясь этими равенствами и припомнивъ означеніе $t = g\left(y + \dfrac{1}{y}\right)$, получимъ

$$y^0 + y^{-0} = 2,$$

$$y + y^{-1} = \frac{t}{g},$$

$$y^2 + y^{-2} = \frac{t^2}{g^2} - 2,$$

$$y^3 + y^{-3} = \frac{t^3}{g^3} - 2\,\frac{t}{g},$$

$$y^4 + y^{-4} = \frac{t^4}{g^4} - 4\,\frac{t^2}{g^2} + 2,$$

и вообще

$$y^r + y^{-r} = \frac{t^r}{g^r} - r\frac{t^{r-2}}{g^{r-2}} + \frac{r(r-3)}{1.2}\frac{t^{r-4}}{g^{r-4}} - \frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3}\frac{t^{r-6}}{g^{r-6}} + \ldots\ldots,$$

гдѣ должно удерживать только положительныя степени t, включая и нульную.

Подобнымъ образомъ

$$\frac{y^0 - y^{-0}}{y^1 - y^{-1}} = 0,$$

$$\frac{y^1 - y^{-1}}{y^1 - y^{-1}} = 1,$$

$$\frac{y^2 - y^{-2}}{y^1 - y^{-1}} = \frac{t}{g},$$

$$\frac{y^3 - y^{-3}}{y^1 - y^{-1}} = \frac{t^2}{g^2} - 1,$$

$$\frac{y^4 - y^{-4}}{y - y^{-1}} = \frac{t^3}{g^3} - 2\frac{t}{g},$$

и вообще

$$\frac{y^r - y^{-r}}{y - y^{-1}} = \frac{t^{r-1}}{g^{r-1}} - (r-2)\frac{t^{r-3}}{g^{r-3}} + \frac{(r-3)(r-4)}{1.2.}\frac{t^{r-5}}{g^{r-5}} - \ldots\ldots,$$

гдѣ, такъ же какъ и въ предыдущемъ случаѣ, должно удерживать только положительныя степени t.

76. Вставляя вмѣсто различныхъ степеней y ихъ значенія изъ этихъ формулъ въ уравненія (11) и помножая ихъ на g^r, получимъ

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
\beta_0 t^r - \beta_1 t^{r-1} + \beta^2 & t^{r-2} - \beta_3 & t^{r-3} + \beta_4 & t^{r-4} - \beta_5 & t^{r-5} + \ldots = 0, \\
-rg^2\beta_0 & +(r-1)g^2\beta_1 & -(r-2)g^2\beta_2 & +(r-3)g^2\beta_3 & \\
 & & +\frac{r(r-3)}{1.2}g^4\beta_0 & -\frac{(r-1)(r-4)}{1.2}g^4\beta_1 &
\end{array}\right\} (12).$$

$$\left.\begin{array}{llll} t^{r-1}-g_1t^{r-2}+\gamma_2 & t^{r-3}-\gamma_3 & t^{r-4}+\gamma_4 & t^{r-5}-\gamma_5 \\ (r-2)g^2\gamma_3 & +(r-3)g^2\gamma_1 & (r-4)g^2\gamma_2 & +(r-5)g^2\gamma_3 \\ & & +\frac{(r-3)(r-4)}{1.2}g^4\gamma_0 & -\frac{(r-4)(r-5)}{1.2}g^4\gamma_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} t^{r-6}+\cdots=0, \\ \\ \\ \end{array}\right\} (12).$$

77. Этими уравненіями и должно пользоваться при опредѣ-ніи величинъ f.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ нихъ и въ формулы (10) поста-ъ одно изъ найденныхъ значеній модуля g, то величина t, овлетворяющая имъ, будетъ представлять соотвѣтствующее этому улю значеніе f, которое и получимъ отыскивая общаго наи-ьшаго дѣлителя уравненій (12). Такимъ образомъ задача объ ѣдѣленіи перваго приближеннаго значенія корней воображае-хъ можетъ считаться оконченною, ибо уравненій (12) доста-но, для опредѣленія величинъ f, во всѣхъ возможныхъ слу-ихъ. Такимъ образомъ, если бы нѣкоторыя изъ найденныхъ ченій g, два, три и т. д. были равны между собою, тогда ціи дѣлитель уравненій (12) будетъ 2-й, 3-й и т. д. степени, равнивая такихъ дѣлителей нулю, мы получимъ уравненія , которыхъ всегда можно найдти значенія f отвѣчающія рав-мъ значеніямъ g.

78. Изъ предыдущаго очевидно также, что и для опредѣленія ваго приближеннаго значенія дѣйствительныхъ корней можно ступать совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ случаѣ рней воображаемыхъ; т. е. разсматривать данное уравненіе со-ящимъ изъ множителей второй степени вида x^2+tx+v по-жая его, если оно нечетной степени, на x; послѣ чего, пере-ходя къ производному уравненію (2), по общему способу, изъ ффиціентовъ четныхъ степеней x опредѣлить различныя зна-нія величинъ v, представляющія произведенія корней. Тогда, я опредѣленія соотвѣтствующихъ значеній t, останется поста-

вить вмѣсто v^2 различныя значенія v въ формулы (10) и въ уравненія (12) и найдти общаго большаго дѣлителя послѣднихъ.

79. Когда значенія v и t найдены, то самые корни уже легко найдти такимъ образомъ. Различаемъ три случая.

1-й

$$v > 0 \text{ и } t < 2\sqrt{v};$$

тогда, полагая $\frac{t}{2\sqrt{v}} = \operatorname{Cos}\varphi$, находимъ

$$x^2 + tx + v = \left\{x + \sqrt{v}\,(\operatorname{Cos}\varphi + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin}\varphi)\right\}\left\{x + \sqrt{v}\,(\operatorname{Cos}\varphi - \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin}\varphi)\right\}.$$

2-й

$$v > 0 \text{ и } t > 2\sqrt{v};$$

полагаемъ $\frac{2\sqrt{v}}{t} = \operatorname{Sin}\varphi$ получимъ

$$x^2 + tx + v = \left\{x + \sqrt{v}\operatorname{Cotg}\frac{1}{2}\varphi\right\}\left\{x + \sqrt{v}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right\}.$$

3-й

$$v < 0;$$

полагаемъ $\frac{2\sqrt{v}}{t} = \operatorname{tg}\varphi$, и слѣдовательно

$$x^2 + tx + v = \left\{x + \sqrt{v}\operatorname{Cotg}\frac{1}{2}\varphi\right\}\left\{x - \sqrt{v}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right\}$$

(въ послѣднемъ случаѣ подъ квадратнымъ корнемъ входитъ численное значеніе v).

Различіе случая корней дѣйствительныхъ отъ случая корней воображаемыхъ здѣсь будетъ состоять только въ томъ, что для послѣднихъ величина v всегда положительна и $t < 2\sqrt{v}$, тогда какъ для корней дѣйствительныхъ величины v могутъ быть и

положительныя и отрицательныя, смотря потому будутъ ли сосѣдніе по численной величинѣ корни имѣть одинакіе знаки или различные. Между тѣмъ уравненіе (2) не даетъ намъ различія въ знакахъ величинъ v, ибо онѣ опредѣляются изъ этаго уравненія только по численной своей величинѣ. По этому для избѣжанія неопредѣленности лучше вычислять корни не прямо даннаго уравненія, а перваго изъ производныхъ, котораго корни — квадраты корней даннаго и для котораго, слѣдовательно, всѣ значенія v положительны. Что же касается до знаковъ корней даннаго уравненія, то по опредѣленіи численной ихъ величины, легко найдти и знаки ихъ прямою вставкой.

80. Переходимъ теперь къ случаю общему: корни даннаго уравненія $a, b, a', b', a'', b'', \ldots$ могутъ быть какіе угодно. Помножая его, если оно нечетной степени на x, разсматриваемъ это уравненіе состоящимъ изъ множителей второй степени вида $x^2 + tx + v$, т. е. полагаемъ

$$(x^2 + tx + v)(x^2 + t_1 x + v_1)(x^2 + t_2 x + v_2) \ldots = 0.$$

Такъ какъ здѣсь все зависитъ отъ закона составленія коефиціентовъ изъ корней, то для большей простоты и ясности, возмемъ уравненіе не высокой степени, напримѣръ шестой, и предположимъ что два корня этаго уравненія, отвѣчающіе модулю v_2 воображаемые, а остальные дѣйствительные. Пусть $v > v_1 > v_2$, и допустимъ, что *каждый дѣйствительный корень, отвѣчающій большему* v, *больше каждаго дѣйствительнаго корня отвѣчающаго меньшему* v, *или больше квадратнаго корня изъ меньшаго* v, *въ случаѣ, если послѣднее отвѣчаетъ воображаемымъ корнямъ.*

Очевидно, первое условіе, относительно дѣйствительныхъ корней, всегда выполняется, кромѣ только случая равныхъ корней, ибо дѣйствительные корни, при вычисленіи, располагаются по своей численной величинѣ. Что касается втораго условія, то оно не будетъ выполнено только въ весьма частномъ случаѣ, — когда

нѣкоторые изъ дѣйствительныхъ корней равны модулю корней воображаемыхъ. Эти исключенія мы разсмотримъ впослѣдствіи.

Въ случаѣ дѣйствительныхъ корней, большій корень мы всегда будемъ означать буквою a меньшій буквою b. Переходя отъ даннаго уравненія къ уравненію котораго корни n-ыя степени корней даннаго, получимъ

$$x^6 + P_1 x^5 + P_2 x^4 + P_3 x^3 + P_4 x^2 + P_5 x + P_6 = 0 \qquad (m)$$

гдѣ

$$P_1 = t^{(n)} + t_1^{(n)} + t_2^{(n)} = a^n + b^n + a'^n + b'^n + t_2^{(n)}$$

$$P_2 = v^n + v_1^n + v_2^n + t^{(n)} t_1^{(n)} + t^{(n)} t_2^{(n)} + t_1^{(n)} t_2^{(n)} = a^n b^n + a'^n b'^n + v_2^n$$

$$+ (a^n a'^n + b^n a'^n + a^n b'^n + b^n b'^n) + (a^n t_2^{(n)} + b^n t_2^{(n)}) + (a'^n t_2^{(n)} + b'^n t_2^{(n)}).$$

$$P_3 = v^n t_1^{(n)} + v^n t_2^{(n)} + v_1^n t^{(n)} + v_1^n t_2^{(n)} + v_2^n t^{(n)} + v_2^n t_1^{(n)} + t^{(n)} t_1^{(n)} t_2^{(n)} =$$

$$= (a^n b^n a'^n + a^n b^n b'^n) + a^n b^n t_2^{(n)}$$

$$+ (a'^n b'^n a^n + a'^n b'^n b^n) + a'^n b'^n t_2^{(n)}$$

$$+ v_2^n a^n + v_2^n b^n + v_2^n a'^n + v_2^n b'^n$$

$$P_4 = v^n v_1^n + v^n v_2^n + v_1^n v_2^n + v^n t_1^{(n)} t_2^{(n)} + v_1^n t^{(n)} t_2^{(n)} + v_2^n t^{(n)} t_1^{(n)} =$$

$$= a^n b^n a'^n b'^n + a^n b^n v_2^n + a'^n b'^n v_2^n$$

$$+ (a^n b^n a'^n t_2^{(n)} + a^n b^n b'^n t_2^{(n)}) + a'^n b'^n a^n t_2^{(n)} + a'^n b'^n b^n t_2^{(n)})$$

$$+ (a^n a'^n v_2^n + b^n a'^n v_2^n + a^n b'^n v_2^n + b^n b'^n v_2^n)$$

$$P_5 = v^n v_1^n t_2^{(n)} + v^n v_2^n t_1^{(n)} + v_1^n v_2^n t^{(n)} = a^n b^n a'^n b'^n t_2^{(n)} + a^n b^n a'^n v_2^n$$

$$+ a^n b^n b'^n v_2^n + a'^n b'^n a^n v_2^n + a'^n b'^n b^n v_2^n$$

$$P_6 = v^n v_1^n v_2^n = a^n b^n a'^n b'^n v_2^n .$$

81. Разсматривая коеффиціенты четныхъ степеней x, P_2, P_4, P_6, легко видѣть, что когда n достаточно велико, то за первое приближеніе можно принять $P_2 = a^n b^n$, $P_4 = a^n b^n a'^n b'^n$, $P_6 = a^n b^n a'^n b'^n v_2^n$, ибо эти члены, въ суммахъ, изъ которыхъ состоятъ коеффиціенты, наибольшіе. Что касается до коеффиціентовъ нечетныхъ степеней x, то замѣчая, что $t_2^{(n)}$ при какомъ угодно n не можетъ превышать, по численному своему значенію, $2\sqrt{v_2^n}$, хотя можетъ сдѣлаться такъ малымъ какъ угодно, (*) видимъ, что при нашихъ условіяхъ коеффиціентъ P_1, по мѣрѣ увеличенія n будетъ неопредѣленно приближаться къ предѣлу a^n, и коеффиціентъ P_3 — къ предѣлу $a^n b^n a'^n$; коеффиціентъ же P_5 не будетъ приближаться ни какому опредѣленному предѣлу, ибо въ составъ его входитъ членъ $a^n b^n a'^n b'^n t_2^{(n)}$, который, по численному своему значенію, можетъ быть или самымъ большимъ, или самымъ меньшимъ, смотря потому будетъ ли Cos $n\varphi$ близокъ къ единицѣ, или къ нулю, и какъ Cos $n\varphi$ съ измѣненіемъ n можетъ мѣнять знакъ, то очевидно, что и коеффиціентъ P_5, при переходѣ отъ одного значенія n къ другому, также можетъ мѣнять

(*) Если воображаемые корни уравненія представимъ $\sqrt{v_2}\,(\mathrm{Cos}\,\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi)$, то множитель $x^2 + t_2 x + v_2$ будетъ $(x^2 + 2\sqrt{v_2^n}\,\mathrm{Cos}\,\varphi x + v)$ а множитель уравненія (m) будетъ $(x^2 + 2\sqrt{v_2^n}\,\mathrm{Cos}\,n\varphi x + v)$, и слѣдовательно $t_2 = 2\sqrt{v_2^n}\,\mathrm{Cos}\,n\varphi$.

знакъ, тогда какъ всѣ прочіе коэффиціенты остаются постоянно положительными, ибо n число четное.

82. И такъ въ настоящемъ случаѣ, составивъ уравненіе (m) по общему способу, въ предѣлахъ перваго приближенія, получимъ

$$P_1 = a^n, \quad \frac{P_2}{P_1} = b^n, \quad \frac{P_3}{P_2} = a'^n, \quad \frac{P_4}{P_3} = b'^n, \quad \frac{P_6}{P_4} = v_2^n;$$

для опредѣленія же величины t_2 можетъ пользоваться уравненіемъ

$$t + t_1 + t_2 - p_1 = 0,$$

въ которое вмѣсто t, t_1 должно вставить найденныя значенія суммъ $a + b$, $a' + b'$.

Вообще если уравненіе имѣетъ не болѣе четырехъ воображаемыхъ корней, то для опредѣленія двухъ значеній t, можно пользоваться коэффиціентами его p_1 и p_{2r-1}. Такимъ образомъ, если бы въ нашемъ уравненіи 6-й степени коэффиціенты P_1 и P_6, при переходѣ отъ одного значенія n къ другому мѣняли знакъ, и вообще измѣнялись не постепенно, тогда очевидно мы имѣли бы

$$P_2 = v^n, \quad \frac{P_3}{P_2} = a'^n, \quad \frac{P_4}{P_3} = b'^n, \quad \frac{P_6}{P_4} = v_2^n;$$

въ этомъ случаѣ v и v_2 будутъ модули воображаемыхъ корней, и для опредѣленія t и t_2 мы можемъ пользоваться уравненіями:

$$t + t_1 + t_2 - p_1 = 0$$
$$vv_1t_2 + vv_2t_1 + v_1v_2t - p_6 = 0$$

Такимъ образомъ способъ изложенный нами выше, для опредѣленія значеній t, необходимо употреблять только въ томъ случаѣ, когда данное уравненіе имѣетъ болѣе четырехъ воображаемыхъ корней.

83. Можетъ случиться, что уголъ φ, отвѣчающій воображаемымъ корнямъ съ модулемъ v_2, будетъ весьма малъ; тогда очевидно и при весьма большомъ n коэффиціентъ P_6, при переходѣ отъ одного значенія n къ другому, можетъ ни разу не измѣнить своего знака; но изъ этаго не должно еще заключать, что всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные; — обратное заключеніе всегда справедливо, т. е. если хотя однажды, при переходѣ отъ одного значенія n къ другому, коэффиціентъ P_6 измѣнитъ знакъ, то v_2 опредѣляемый изъ слѣдующаго коэффиціента P_6 принадлежитъ воображаемымъ корнямъ. Въ случаѣ корней воображаемыхъ можно замѣтить, что хотя бы P_6 не измѣнялъ знака, однако же съ увеличеніемъ n онъ не будетъ постепенно увеличиваясь приближаться къ опредѣленному предѣлу. Впрочемъ когда есть хотя малѣйшее сомнѣніе относительно различія дѣйствительныхъ или воображаемыхъ корней, отвѣчающихъ извѣстному значенію v, то лучше всего для такого v найдти соотвѣтствующее значеніе t, и за тѣмъ опредѣлить уже корни изъ уравненія

$$x^2 + tx + v = 0.$$

84. Если бы одно изъ значеній v, напримѣръ v_1, отвѣчало равнымъ дѣйствительнымъ корнямъ $a' = b'$ тогда, для перваго приближенія, мы имѣли бы

$$P_1 = a^n, \quad P_2 = a^n b^n, \quad P_3 = 2a^n b^n a'^n, \quad P_4 = a^n b^n a'^{2n}, \quad P_6 = a^n b^n a'^{2n} v_2^n$$

и слѣдовательно

$$P_1 = a^n, \quad \frac{P_2}{P_1} = b^n, \quad \frac{P_3}{2P_2} = a'^n = b'^n, \quad \frac{2P_4}{P_3} = a'^n = b'^n, \quad \frac{P_6}{P_4} = v^n.$$

Въ этомъ случаѣ лучше опредѣлять значеніе v_1 изъ P_4 и P_2 и потомъ, вычисливъ t_1, рѣшить уравненіе $x^2 + t_1 x + v_1 = 0$.

85. Условія, которыя мы приняли при разсмотрѣніи коэффиціентовъ P_1, P_2, ... не всѣ будутъ выполнены только въ частныхъ

случаяхъ, а именно когда данное уравненіе имѣетъ нѣсколько равныхъ дѣйствительныхъ корней, или дѣйствительные корни равные модулю воображаемыхъ корней, или наконецъ — равные модули отвѣчающіе воображаемымъ корнямъ.

Разсмотримъ всѣ эти случаи. Предположимъ, что въ нашемъ уравненіи корни $b=a'=b'$; тогда очевидно, при первомъ приближеніи, будетъ:

$$P_1 = a^n,$$

$$P = a^n b^n + a^n a'^n + a^n b'^n = 3a^n b^n,$$

$$P_3 = a^n b^n a'^n + a^n b^n b'^n + a^n a'^n b'^n = 3a^n b^{2n}$$

$$P_4 = a^n b^n a'^n b'^n = a^n b^{3n}$$

$$P_6 = a^n b^n a'^n b'^n v''^n = a^n b^{3n} v''^n.$$

Такимъ образомъ здѣсь значенія коеффиціентавъ P_1, P_2, ... располагаются точно также, какъ располагаются они въ простыхъ множителяхъ уравненія, отвѣчающихъ этому частному случаю; ибо въ самомъ дѣлѣ

$$(x+a^n)(x+b^n)^3 = x^4+(a^n+3b^n)x^3+(3a^nb^n+3b^{2n})x^2+(3b^{2n}a^n+b^{3n})x+a^nb^{3n};$$

откуда, при неопредѣленно возрастающемъ n, для перваго приближенія, получимъ:

$$(x+a^n)(x+b^n)^3 = x^4 + a^n x^3 + 3a^n b^n x^2 + 3b^{2n}a^n x + a^n b^{3n}.$$

86. Предположимъ далѣе, что одинъ изъ дѣйствительныхъ корней, напримѣръ a' равенъ модулю $v_2^{\frac{1}{2}}$ воображаемыхъ корней. Тогда, очевидно, для перваго приближенія, коеффиціенты P_1 и P_2 будутъ имѣть значенія a^n и $a^n b^n$; коеффиціентъ P_3 не будетъ приближаться ни къ какому опредѣленному значенію, ибо въ немъ членъ $a^n b^n a'^n = a^n b^n v_2^{\frac{n}{2}}$ не будетъ уже наибольшимъ, такъ какъ

величина $t_2^{(n)}$ можетъ весьма мало разниться отъ $2v_{2^2}^{\frac{n}{2}}$, и слѣдовательно членъ $a^n b^n t_2^{(n)}$ можетъ весьма мало разниться отъ $2a^n b^n v_{2^2}^{\frac{n}{2}}$. Тоже самое должно сказать о коеффиціентѣ P_4, — въ немъ членъ $a^n b^n a'^n b'^n = a^n b^n v_{2^2}^{\frac{n}{2}} b'^n$ также не будетъ наибольшимъ, ибо членъ $a^n b^n b'^n t_2^{(n)}$ можетъ весьма мало разниться отъ $2a^n b^n v_{2^2}^{\frac{n}{2}} b'^n$. Въ коеффиціентѣ P_6 наибольшій членъ будетъ $a^n b^n a'^n v_2^n = a^n b^n v_2^{\frac{3n}{2}}$ потому что, если даже $t_2^{(n)} = 2v_{2^2}^{\frac{n}{2}}$, то и тогда $a^n b^n a'^n b'^n t_2^{(n)} < a^n b^n v_2^{\frac{3n}{2}}$ ибо $b' < v_2^{\frac{1}{2}}$. И такъ коеффиціентъ P_6 будетъ приближаться къ опредѣленному значенію $a^n b^n v_2^{\frac{3n}{2}}$; и наконецъ коеффиціентъ P_6 — къ опредѣленному значенію $a^n b^n b'^n v_2^{\frac{3n}{2}}$. Подобнымъ образомъ легко разобрать и всѣ прочіе частные случаи; такъ напр., если данное уравненіе имѣетъ два или три и т. д. модуля воображаемыхъ корней равные между собою, тогда въ уравненіи котораго корни n-я степени корней даннаго, три, или пять и т. д. сряду стоящихъ коеффиціентовъ будутъ имѣть неопредѣленныя значенія.

87. Изложивъ теорію способа Греффе, мы можемъ теперь самый способъ выразить въ нѣсколькихъ словахъ. По данному алгебраическому уравненію

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-2} x^2 + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

при помощи таблицъ Гаусса должно составить уравненіе

$$x^m + Q_1 x^{m-1} + Q_2 x^{m-2} + \ldots\ldots Q_{m-2} x^2 + Q_{m-1} x + Q_m = 0,$$

гдѣ n такъ велико, что при переходѣ къ слѣдующему производному уравненію на значеніе по крайнѣй мѣрѣ коеффиціентовъ съ четными указателями Q_2, Q_4, Q_6, ... удвоенныя произведенія коеффиціентовъ, стоящихъ рядомъ съ ними по обѣ стороны, не имѣютъ вліянія. Тогда разсматривая коеффиціенты Q_1, Q_3, Q_5, ..., мы можемъ встрѣтить различные случаи:

1-й. Всѣ коеффиціенты $Q_1, Q_2, \ldots\ldots$, какъ при четныхъ, такъ и при нечетныхъ степеняхъ x представляютъ логарифмы полныхъ квадратовъ, что узнается потому, что при переходѣ къ слѣдующему производному уравненію, не только на коеффиціенты съ четными, но и на коеффиціенты съ нечетными указателями, удвоенныя произведенія сосѣднихъ съ ними членовъ не имѣютъ вліянія; притомъ, начиная съ перваго производнаго уравненія, всѣ коеффиціенты постоянно остаются положительными. Въ этомъ случаѣ всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные и логарифмы ихъ n-хъ степеней получатся, вычитая изъ каждаго коеффиціента Q предыдущій.

2-й. Нѣкоторые изъ коеффиціентовъ съ нечетными указателями, напр. Q_1, Q_3, ... не приближаются постепенно ни къ какому опредѣленному предѣлу, и вообще, хотя однажды, при переходѣ отъ одного изъ производныхъ уравненій къ другому, мѣняютъ знакъ; тогда слѣдующіе за ними коеффиціенты Q_2, Q_4, опредѣляютъ модули воображаемыхъ корней, такъ что $Q_6 - Q_4 = \log v^2$, и т. д. отвѣчающіе этимъ значеніямъ v, величины t опредѣляются или изъ коеффиціентовъ даннаго уравненія p_1 и p_{m-1}, если оно имѣетъ не болѣе двухъ паръ воображаемыхъ корней, или же по способу изложенному нами выше, находя общаго наибольшаго дѣлителя уравненій (12), что можетъ быть также весьма просто сдѣлано при помощи таблицъ Гаусса.

Кромѣ этихъ общихъ случаевъ могутъ быть еще нѣкоторые частные. Такъ напримѣръ, при опредѣленіи одного изъ значеній v можетъ быть сомнѣніе — принадлежитъ ли оно воображаемымъ корнямъ или дѣйствительнымъ; тогда находимъ, по общему способу, соотвѣтствующее этому v значеніе t и рѣшаемъ уравненіе $x^2 + tx + v = 0$. Такъ еще, если два изъ коеффиціентовъ Q стоящихъ сряду имѣютъ значеніе неопредѣленное; тогда одинъ изъ дѣйствительныхъ корней уравненія равенъ модулю корней воображаемыхъ, и т. д.

88. Когда первыя приближенныя значенія корней найдены, то останется находить, если нужно, болѣе точныя ихъ значенія. Но очевидно, при той степени приближенія съ какою даетъ ихъ способъ Греффе, мы можемъ, безъ всякаго сомнѣнія, употребить для этой цѣли способъ Ньютона.

И такъ предположимъ сначала, что по первому приближенному значенію x_0 дѣйствительнаго корня x мы хотимъ найдти болѣе точное его значеніе. Называемъ $f(x)$ первую часть даннаго уравненія

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m = 0;$$

тогда, полагая $x = x_0 + \Delta x_0$, по способу Ньютона, получимъ

$$f(x_0) + \Delta x_0 f'(x_0) = 0,$$

или

$$f(x_0) + \frac{\Delta x_0}{x_0} x_0 f'(x_0) = 0;$$

откуда

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{f(x_0)}{x_0 f'(x_0)}.$$

Множитель x_0 прибавленный къ $f'(x_0)$ имѣетъ здѣсь двойную выгоду: во первыхъ произведеніе $x_0 f'(x_0)$, при численномъ счетѣ, гораздо легче получается изъ $f(x_0)$ нежели просто $f'(x_0)$; во вторыхъ, такъ какъ способъ Греффе даетъ первыя приближенныя значенія корней подъ видомъ ихъ логариѳмовъ, то гораздо удобнѣе имѣть поправку не самаго корня, а его логариѳма; а предыдущее уравненіе даетъ прямо

$$\Delta \log x_0 = -\frac{f(x_0)}{x_0 f'(x_0)} \cdot M,$$

гдѣ M модуль системы логариѳмовъ.

89. Предположимъ далѣе, что по первому приближенному значенію воображаемаго корня мы хотимъ найдти болѣе точное его

значеніе. Очевидно и въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$f(x_0) + \frac{\Delta x_0}{x_0} x_0 f'(x_0) = 0 \qquad \text{(b)}.$$

Пусть первое приближенное значеніе множителя второй степени, отвѣчающаго воображаемымъ корнямъ, будетъ

$$x^2 + f_0 x + g_0^2$$

и пусть корни этаго множителя будутъ

$$x_0 = -g_0 (\mathrm{Cos}\, \varphi_0 + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \varphi_0), \quad x'_0 = -g_0 (\mathrm{Cos}\, \varphi_0 - \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \varphi_0) \quad \text{(c)}.$$

Тогда получимъ

$$f(x_0) = \sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] + \sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] \sqrt{-1},$$

$$f(x'^m_0) = \sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] - \sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] \sqrt{-1},$$

$$x_0 f'(x_0) = \sum_0^m [m\,(-g_0)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] + \sum_0^m [m\,(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] \sqrt{-1},$$

$$x'_0 f'(x'_0) = \sum^m [m\,(-g_0)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] - \sum^m [m\,(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] \sqrt{-1},$$

гдѣ знакъ суммы относится къ m. Полагаемъ для краткости (что всегда возможно)

$$\sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] = P\, \mathrm{Cos}\, Q, \quad \sum_0^m [m\,(-g)^m \mathrm{Cos}\, m\varphi_0] = R\, \mathrm{Cos}\, T,$$

$$\sum_0^m [(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] = P\, \mathrm{Sin}\, Q, \quad \sum_0^m [m\,(-g_0)^m \mathrm{Sin}\, m\varphi_0] = R\, \mathrm{Sin}\, T.$$

Тогда, изъ уравненія (b) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} P\,\mathrm{Cos}\, Q + P\,\mathrm{Sin}\, Q\sqrt{-1} + \Delta \log x_0 (R\,\mathrm{Cos}\, T + R\,\mathrm{Sin}\, T\sqrt{-1}) = 0 \\ P\,\mathrm{Cos}\, Q - P\,\mathrm{Sin}\, Q\sqrt{-1} + \Delta \log x'_0 (R\,\mathrm{Cos}\, T - R\,\mathrm{Sin}\, T\sqrt{-1}) = 0 \end{aligned}\right\} \text{(d)}.$$

Но по нашему означенію (c)

$$\log x_0 = \log(-g_0) + \log(\operatorname{Cos}\varphi_0 + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\varphi_0)$$
$$= \log(-g_0) + \varphi_0\sqrt{-1},$$
$$\log x'_0 = \log(-g_0) + \log(\operatorname{Cos}\varphi_0 - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\varphi_0)$$
$$= \log(-g_0) - \varphi_0\sqrt{-1}.$$

Сверхъ того, если истинное значеніе корней x_0 и x'_0 назовемъ

$$x = -g(\operatorname{Cos}\varphi \pm \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\varphi),$$

то

$$\log x = \log(-g) + \varphi\sqrt{-1},$$
$$\log x' = \log(-g) - \varphi\sqrt{-1};$$

а потому

$$\log x - \log x_0 = \Delta\log x_0 = \Delta\log g_0 + \Delta\varphi_0\sqrt{-1}$$

и

$$\log x' - \log x'_0 = \Delta\log x'_0 = \Delta\log g_0 - \Delta\varphi_0\sqrt{-1}.$$

Вставляя эти значенія $\Delta\log x_0$ и $\Delta\log x'_0$ въ уравненія (d), получимъ

$$P\operatorname{Cos}Q + \sqrt{-1}P\operatorname{Sin}Q + [R\operatorname{Cos}T + \sqrt{-1}R\operatorname{Sin}T](\Delta\log g_0 + \Delta\varphi_0\sqrt{-1}) = 0,$$
$$P\operatorname{Cos}Q - \sqrt{-1}P\operatorname{Sin}Q + [R\operatorname{Cos}T - \sqrt{-1}R\operatorname{Sin}T](\Delta\log g_0 - \Delta\varphi_0\sqrt{-1} = 0.$$

Складывая и вычитая эти два уравненія, находимъ

$$P\operatorname{Cos}Q + R\operatorname{Cos}T\Delta\log g_0 - R\operatorname{Sin}T\Delta\varphi_0 = 0,$$
$$P\operatorname{Sin}Q + R\operatorname{Sin}T\Delta\log g_0 + R\operatorname{Cos}T\Delta\varphi_0 = 0;$$

откуда

$$\Delta\log g_0 = -\frac{P\operatorname{Cos}(Q-T)}{R}\cdot M, \qquad \Delta\varphi_0 = -\frac{P\operatorname{Sin}(Q-T)}{R},$$

гдѣ M означаетъ модуль системы логарифмовъ (log).

90. Вмѣсто поправки для φ_0 можно вычислять поправку для f_0. Для этаго замѣчаемъ, что

$$f_0 = 2g_0\operatorname{Cos}\varphi_0,$$

и слѣдовательно

$$\Delta f_0 = 2 \operatorname{Cos} \varphi_0 \, \Delta g_0 - 2 g_0 \operatorname{Sin} \varphi_0 \, \Delta \varphi_0 ;$$

а вставляя сюда значенія Δg_0 и $\Delta \varphi_0$, получимъ

$$\Delta f_0 = - \frac{2 P g_0 \operatorname{Cos} (Q - T + \varphi_0)}{R},$$

или еще

$$\Delta \log f_0 = - \frac{P \operatorname{Cos} (Q - T + \varphi_0)}{R \operatorname{Cos} \varphi_0} \cdot M.$$

Такимъ образомъ, по первому приближенному значенію, можно вычислить воображаемые корни съ какою угодно точностію.

91. Намъ остается еще разсмотрѣть тотъ случай, когда способъ Греффе даетъ, какъ для дѣйствительныхъ, такъ и для воображаемыхъ корней, первыя приближенныя значенія равныя между собою. Очевидно, что въ этомъ случаѣ для вычисленія болѣе точнаго значенія корней, можно прямо употреблять способъ Нютона только въ томъ случаѣ, когда извѣстно *à priori*, что уравненію принадлежатъ равные корни, ибо можетъ случится, что такое равенство корней будетъ только въ предѣлахъ перваго приближенія, т. е. что корни такъ мало разнятся между собою, что въ предѣлахъ перваго приближенія эта разность еще не замѣтна, и тогда употребленіе способа Нютона невозможно.

92. Греффе даетъ слѣдующій способъ для вычисленія болѣе точнаго значенія корней, когда первыя ихъ приближенныя значенія равны между собою.

Пусть первое приближенное значеніе какого нибудь корня даннаго уравненія будетъ x_0, точное его значеніе $x = x_0 + \Delta x_0$; тогда получимъ

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \Delta x_0 f'(x_0) + \Delta x_0^2 f''(x_0) + \Delta x_0^3 f'''(x_0) + \ldots\ldots = 0$$

или

$$1 + \Delta x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + \Delta x_0^2 \cdot \frac{1}{1.2} \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} + \Delta x_0^3 \cdot \frac{1}{1.2.3.} \frac{f'''(x_0)}{f(x_0)} + \ldots = 0 \quad (\varepsilon).$$

Но, означая корни даннаго уравненія чрезъ $a, b, c, \ldots$ т. е. полагая

$$f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots,$$

въ слѣдствіе состава производныхъ функцій $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... изъ множителей $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... мы получимъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} + \ldots\ldots = \varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{1.2}\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)(x+c)} \cdots + \frac{1}{(x+b)(x+c)} + \frac{1}{(x+b)(x+d)} + \ldots\ldots\ldots = \varepsilon_2,$$

$$\frac{1}{1.2.3}\frac{f'''(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} + \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+d)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x+b)(x+c)(x+d)} + \ldots = \varepsilon_3,$$

т. д. (*) .....

(*) Въ самомъ дѣлѣ полагаемъ

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots}\left\{(x+a+y)(x+b+y)(x+c+y)\cdots\right\} = 1+\varepsilon_1 y+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 y^3+\ldots, \quad (a)$$

гдѣ y произвольная величина. Тогда замѣчая, что

$$(x+a+y)(x+b+y)(x+c+y)\ldots = (x+a)(x+b)(x+c)\cdots + \left\{(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\right.$$
$$\left.+(x+a)(x+c)(x+d)\cdots+\ldots\right\} y+\left\{(x+c)(x+d)\cdots+(x+b)(x+d)+\ldots\right\} y^2+\ldots,$$

получимъ

$$\varepsilon_1 = \Sigma\left(\frac{1}{x+a}\right), \quad \varepsilon_2 = \Sigma\left(\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right), \quad \varepsilon_3 = \Sigma\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}, \ldots$$

Съ другой стороны, первая часть уравненія (a) можетъ быть представлена такъ:

$$\frac{1}{f(x)}f(x+y) = 1 + y\frac{f'(x)}{f(x)} + y^2\frac{f''(x)}{f(x)} + y^3\frac{f'''(x)}{f(x)} + \ldots\ldots,$$

слѣдовательно

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{1.2}\frac{f''(x)}{f(x)} = \varepsilon_2, \quad \frac{1}{1.2.3}\frac{f'''(x)}{f(x)} = \varepsilon_3, \ldots\ldots$$

а потому называя ε_1°, ε_2°, ε_3°, ... значенія суммъ ε, когда въ нихъ поставимъ $x_\circ$ вмѣсто x, изъ уравненія (ε) получимъ

$$1 + \Delta x_\circ \varepsilon_1^\circ + \Delta x_\circ^2 \varepsilon_2^\circ + \Delta x_\circ^3 \varepsilon_3^\circ + \Delta x_\circ^4 \varepsilon_4^\circ + \cdots = 0. \qquad (f).$$

Это уравненіе служитъ для вычисленія $\Delta x_\circ$ какова бы ни была величина этой поправки. Но когда $\Delta x_\circ$ величина весьма малая, то въ этомъ уревненіи мы можемъ удерживать не всѣ члены сполна, и очевидно — чѣмъ менѣе можно удерживать членовъ въ этомъ уравненіи, тѣмъ оно удобнѣе для рѣшенія; однако же не должно упускать изъ виду тѣхъ членовъ, которые и при безконечно маломъ $\Delta x_\circ$ могутъ имѣть значеніе конечное.

93. Для этаго предположимъ, что первое приближенное значеніе корня $x_\circ = -a_\circ$, и пусть $\Delta x_\circ = a - a_\circ$ будетъ весьма малая величина 1-го порядка. Тогда

$$\varepsilon_1^\circ = \frac{1}{a-a_\circ} + \frac{1}{b-a_\circ} + \frac{1}{c-a_\circ} + \cdots$$

$$\varepsilon_2^\circ = \frac{1}{(a-a_\circ)(b-a_\circ)} + \frac{1}{(a-a_\circ)(c-a_\circ)} + \cdots + \frac{1}{(b-a_\circ)(c-a_\circ)} + \cdots,$$

$$\varepsilon_3^\circ = \frac{1}{(a-a_\circ)(b-a_\circ)(c-a_\circ)} + \cdots + \frac{1}{(b-a_\circ)(c-a_\circ)(d-a_\circ)} + \cdots$$

и т. д. И слѣдовательно, если корни, b, c, d, ... такъ разнятся отъ $a_\circ$, что $b-a_\circ$, $c-a_\circ$, $d-a_\circ$, ... будутъ величины коненчныя въ сравненіи съ $a-a_\circ$, тогда въ уравненіи (f) для вычисленія $\Delta x_\circ$ достаточно удерживать только первые два члена, которые одни только и будутъ конечными, всѣ же прочіе будутъ, въ сравненіи съ ними, величинами весьма малыми или 1-го, или высшихъ порядковъ. И такъ въ этомъ случаѣ мы получимъ:

$$1 + \varepsilon_1^\circ \Delta x_\circ = 1 + \frac{f'(x_\circ)}{f(x_\circ)} \Delta x_\circ = 0,$$

какъ и слѣдуетъ по способу Ньютона. Но если мы имѣемъ два первыя приближенныя значенія корней равныя между собою, т. е. если корень b также мало разнится отъ a_0, какъ и корень a тогда въ суммѣ ε_2^0 первый членъ $\frac{1}{(a-a_0)(b-a_0)}$ будетъ имѣть въ знаменателѣ весьма малую величину втораго порядка, и слѣдовательно въ уравненіи (f) нельзя пренебрѣгать членомъ $\varepsilon_2^0 \Delta x_0^2$, ибо онъ будетъ имѣть значеніе конечное, всѣ же прочіе члены снова будутъ весьма малыя величины или 1-го, или высшихъ порядковъ. И такъ, въ этомъ случаѣ, для вычисленія Δx_0, мы будемъ имѣть

$$1 + \varepsilon_1^0 \Delta x_0 + \varepsilon_2^0 \Delta x_0^2 = 1 + \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Delta x_0 \frac{1}{1.2.} \frac{f''(x_0)}{f(x^0)} \Delta x_0^2 = 0 \quad (g).$$

Если первыя приближенныя значенія корней $a_0 = b_0$ дѣйствительныя, то при рѣшеніи этаго уравненія мы можетъ встрѣтить три случая: 1-й оба корня его могутъ быть дѣйствительные и неравные; тогда одинъ изъ нихъ будетъ служить поправкою для a_0, другой для b_0, и дальнѣйшее вычисленіе корней a и b можетъ быть сдѣлано уже по способу Ньютона. 2-й случай—оба корня уравненія (g) дѣйствительные, но равные между собою; тогда и въ предѣлахъ новаго приближенія корни a и b равны между. Наконецъ 3-й случай—оба корня уравненія (g) воображаемые, тогда данное уравненіе будетъ имѣть два воображаемыхъ корня вида $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ и $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, гдѣ β величина весьма малая перваго порядка. Потому что въ суммѣ ε, два члена отвѣчающіе этимъ корнямъ $\frac{1}{x+\alpha+\beta\sqrt{-1}} + \frac{1}{x+\alpha-\beta\sqrt{-1}}$ соединятся въ одинъ $\frac{2(x+\alpha)}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{2}{x+\alpha+\frac{\beta^2}{x+\alpha}}$, котораго знаменатель будетъ только тогда величиною весьма малою перваго порядка, когда β будетъ того же порядка какъ и $a_0 - a$.

Теперь уже очевидно какимъ образомъ поступать въ томъ случаѣ, когда въ числѣ первыхъ приближенныхъ значеній будетъ болѣе двухъ равныхъ между собою.

Прим. 4-й.

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0.$$

Первое производное уравненіе будетъ

$$x^7 + 9x^4 + 36x^2 + 36 = 0;$$

второе

$$x^7 + 81x^4 - 648x^3 + 1944x^2 - 2592x + 1296 = 0,$$

третье

$$x^7 - 1296x^6 + 11745x^4 + 104976x^3 + 629856x^2 + 1679616x + 1679616 = 0.$$

Отсюда переходимъ къ логариѳмическому счету, т. е. вмѣсто каждаго коеффиціента беремъ его логариѳмъ, вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ знакомъ и пользуемся таблицами Гаусса для вычисленія логарифмовъ коеффиціентовъ слѣдующихъ производныхъ уравненій. Восходя до восьмаго производнаго уравненія, получимъ

$$x^7 + 50{,}98747\,x^6 + 94{,}96298\,x^5 + 138{,}34756\,x^4 + 158.73567\,x^3 + 178{,}52144\,x^2 + 189{,}15081\,x + 199{,}20672 = 0.$$

Здѣсь вычисленіе оканчивается, ибо на коеффиціенты при x^6, x^4, x^2, x^0, при переходѣ къ слѣдующему производному уравненію, сосѣдніе коеффиціенты не имѣютъ вліянія. Что касается до коеффиціентовъ при x^5, x^3, x, то первый, въ третьемъ производномъ уравненіи, а послѣдніе во второмъ и шестомъ становятся отрицательными. Отсюда заключаемъ, что данное уравненіе имѣетъ три пары воображаемыхъ корней, которыхъ модули опредѣлятся вычитая изъ коеффиціента при x^4 — коеффиціентъ при x^3, изъ коеффиціента при x^2 — коеффиціентъ при x^4 и т. д. А именно, назвавъ дѣйствительный корень уравненія буквою a, модули воображаемыхъ g, g_1. g_2, получимъ:

$$la = 0{,}199170,$$

$$lg^2 = 0{,}341250,$$

$$lg_1^2 = 0{,}156929,$$

$$lg_2^2 = 0{,}080802.$$

Находя по общему способу соотвѣтствующія этимъ модулямъ значенія f, мы увидимъ, что данное уравненіе, при первомъ приближеніи, можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$(x + 1{,}58186)\,(x^2 - 1{,}13289\,x + 2{,}19405)\,(x^2 - 1{,}92464\,x + 1{,}43527)\,(x^2 + 1{,}47553\,x + 1{,}20447) = 0.$$

Прим. 2-й.

Уравненіе Гаусса

$$x^7 - \frac{7}{2}x^5 + \frac{63}{13}x^4 - \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$$

Уничтожая знаменателей и восходя до 7-го производнаго уравненія, увидимъ, что всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные и отрицательные (по нашему означенію). А именно. называя эти корни по порядку численной ихъ величины буквами a, b, c, d, e, f, g, для перваго приближенія, получимъ

$$la = 9{,}98886,$$

$$lb = 9{,}93979,$$

$$lc = 9{,}84699,$$

$$ld = 9{,}69895,$$

$$le = 9{,}47287,$$

$$lf = 9{,}11138,$$

$$lg = 8{,}40562.$$

Прим. 3-й.

$$x^7 - 2x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Восходя до 8-го производнаго уравненія, получимъ

$$x^7 + 74{,}95884\,x^6 + 122{,}81202\,x^5 - 151{,}32153\,x^4 + 179{,}58882\,x^3 + 190{,}99129\,x^2 + 195{,}21132\,x + 199{,}20704 = 0.$$

Коэффиціенты при x^4 и x имѣютъ неопредѣленное значеніе и при переходѣ отъ одного производнаго уравненія къ другому мѣняютъ знакъ; откуда заключаемъ, что уравненіе имѣетъ двѣ пары воображаемыхъ корней, которыхъ модули опредѣляются вычитая изъ коэффиціента при x^3 коэффиціентъ при x^4 и изъ члена независящаго отъ x коэффиціентъ при x^2; дѣйствительные корни получатся вычитая изъ каждаго опредѣленнаго коэффиціента его предыдущій также опредѣленный. Такимъ образомъ получимъ:

$$la = 0{,}292809$$
$$lb = 0{,}186927$$
$$lg^2 = 0{,}221785$$
$$lc = 0{,}044541$$
$$lg_1^2 = 0{,}032093,$$

соотвѣтствующія модулямъ g и g_1 значенія f и f_1 можно вычислить пользуясь уравненіями

$$a + b + c + f + f_1 = p_1 = 0$$

$$g^2 g_1^2 (ab + ac + bc) + ab\, cg^2 f_1 + ab\, cg_1^2 f = p_6 = -5.$$

Послѣ чего, при первомъ приближеніи, данное уравненіе можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$(x + 1{,}96249)(x - 1{,}53790)(x - 1{,}11800)(x^2 + 1{,}29258\, x + 1{,}56642)(x^2 - 0{,}60917\, x + 1{,}07669) = 0.$$

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОБЗОРЪ СПОСОБОВЪ ДЛЯ РѢШЕНІЯ ЧИСЛЕННЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ.

94. Рѣшеніе численныхъ алгебраическихъ уравненій составляло въ математическомъ анализѣ, съ давнихъ поръ, одну изъ задачъ первоклассныхъ, какъ потому, что много весьма важныхъ вопросовъ анализа приводится къ рѣшенію численныхъ уравненій, такъ и потому, что рѣшеніе это представляло долгое время чрезвычайныя трудности, какъ скоро степень уравненія была довольно высока. Даже и въ настоящее время, несмотря на много способовъ, въ теоретическомъ отношеніи непогрѣшительныхъ, рѣшеніе уравненій высокой степени требуетъ многосложныхъ вычисленій. По этому неудивительно, что до открытія дифференціальнаго исчисленія, много геометровъ занимались задачею о рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій, особенно съ того времени какъ увидѣли что общія формулы для рѣшенія уравненій уже третьей и четвертой степени весьма сложны и что уравненія даже третьей степени представляютъ такіе случаи, въ которыхъ вычисленіе корней по общимъ формуламъ невозможно. Но вопросъ о рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій получилъ еще большую важность съ тѣхъ поръ какъ Норвежскій математикъ Абель доказалъ, что для рѣшенія уравненій выше четвертой степени общей формулы, въ радикалахъ, не можетъ и быть.

По этому намъ кажется не безполезнымъ прослѣдить вопросъ о рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій съ тѣхъ самыхъ поръ когда появились первыя попытки дать способы для этаго рѣшенія, которые можно назвать сколько нибудь общими. При этомъ мы ограничимся только уравненіями съ одною неизвѣтной.

СПОСОБЪ ВЬЕТА.

95. Первая попытка дать общій способъ для рѣшенія алгебраическихъ уравненій всѣхъ степеней, принадлежитъ, сколько намъ извѣстно, математику XVI-го столѣтія Вьету (Viete). Замѣчая, что извлечь корень какой нибудь степени m, изъ числа a значитъ найдти одно изъ значеній x удовлетворяющихъ уравненію $x^m = a$, Вьетъ желалъ обобщить способъ извлеченія корней, примѣняя его къ рѣшенію уравненій всѣхъ степеней. Но, несмотря на многія упрощенія сдѣланныя въ способѣ Вьета Гарріотомъ (Harriot), какъ говоритъ Монтюкла (*), примѣненіе его къ рѣшенію полныхъ уравненій даже третьей степени требуетъ уже слишкомъ многосложныхъ вычисленій. Лангранжъ впрочемъ показалъ, что если уравненіе приведено къ такому виду, что всѣ члены содержащіе неизвѣстную величину положительные, а членъ извѣстный отрицателный, притомъ когда извѣстно первое приближенное значеніе искомаго корня, то примѣненіе способа Вьета усовершенствованнаго Гарріотомъ къ вычисленію болѣе точныхъ значеній этаго корня уже не представляетъ большаго затрудненія.

96. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ напримѣръ, что уравненіе третьей степени

$$x^3 + Ax^2 + Bx - C = 0$$

уже имѣетъ требуемый видъ, т. е. предположимъ, что коэффи-

(*) Hist. des Math. par Montucla t. III, p. 19.

ціенты A, B, C, здѣсь числа положительныя и назовемъ первое приближенное значеніе искомаго корня буквою a; истинное значеніе корня пусть будетъ $x = a + p$. Получимъ

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 + Aa^2 + 2Aap + Ap^2 + Ba + Bp - C = 0,$$

или

$$p(3a^2 + 2Aa + B) + p^2(3a + A) + p^3 + a^3 + Aa^2 + Ba - C = 0;$$

откуда

$$p = \frac{C - a(a^2 + Aa + B)}{3a^2 + 2Aa + B} - \frac{\{(3a + A)p^2 + p^3\}}{3a^2 + 2Aa + B},$$

и слѣдовательно

$$p < \frac{C - a(a^2 + Aa + B)}{3a^2 + 2Aa + B}.$$

Это неравенство и можетъ служить для отысканія приближеннаго значенія p. Называя это значеніе p' и полагая $p = p' + q$, для опредѣленія q получимъ новое неравенство

$$q < \frac{C - (a + p')\{(a + p')^2 + A(a + p) + B\}}{3(a + p')^2 + 2A(a + p') + B}.$$

97. Очевидно, что эти неравенства только тогда имѣютъ мѣсто, когда въ заданномъ уравненіи всѣ члены положительны кромѣ послѣдняго. Для приведенія уравненій къ этому виду Лагранжъ даетъ такой способъ: назовемъ a и $b > a$ границы одного изъ корней алгебраическаго уравненія $F(x) = 0$; если a и b выбраны такимъ образомъ, что всѣ другіе дѣйствительные корни, равно какъ и дѣйствительныя части воображаемыхъ корней уравненія, лежатъ внѣ границъ a и b, то подстановленіе, вмѣсто x, выраженія $\frac{a + bx}{1 + x}$ приведетъ уравненіе $F(x) = 0$ къ требуемому виду, только бы меньшая граница a была достаточно близка къ искомому корню (*).

(*) Traité de la résolution des équations numeriques par Lagrange (Note XII p. 234).

98. Главный недостатокъ способа Вьета очевидно состоитъ въ томъ, что онъ требуетъ знанія перваго приближеннаго значенія корня и притомъ съ извѣстною точностію, — а это и составляетъ главную трудность при рѣшеніи уравненій. Притомъ приближеніе къ искомому корню, при помощи предыдущихъ неравенствъ, весьма медленно, такъ что каждое новое дѣйствіе даетъ только одну точную цифру истиннаго значенія корня. Сверхъ того, какъ поправка искомаго корня опредѣляется при помощи неравенства, то очевидно при выборѣ этой поправки всегда есть нѣкотораго рода произволъ, не удобный въ томъ смыслѣ, что иногда приводится дѣлать нѣсколько попытокъ чтобы найти истинную цифру корня.

99. Возмемъ въ примѣръ уравненіе уже приведенное къ виду, который требуетъ Лагранжъ –

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Называя a первое приближенное значеніе корня, для опредѣленія поправки p будемъ имѣть неравенство:

$$p < \frac{3-(a^2+2a+4)a}{3a^2+4a+4}.$$

Но легко видѣть, что одинъ изъ корней даннаго уравненія лежитъ между границами 0 и 1; а потому, полагая $a = 0$, получимъ $p < \frac{3}{4}$; пусть $p = 0,5$; тогда новая поправка q должна удовлетворять тому же предыдущему неравенству, въ которомъ должно только полагать $a = 0,5$, т. е. $q < \frac{0,375}{6,75}$ или $q < 0,055\ldots$ Полагаемъ $q = 0,05$; для опредѣленія новой поправки r получимъ неравенство $r < \frac{0,28625}{7,1075}$ или $r < 0,00402\ldots$. Пусть $r = 0,003$; тогда новая поправка s будетъ опредѣлена неравенствомъ $s < \frac{0,007269623}{7,129427}$

или $s < 0{,}001019$, и такъ далѣе. Приближенное значеніе корня будетъ слѣдовательно

$$x = 0{,}5539.$$

Не имѣя подъ руками сочиненій Вьета или Гарріота, мы не можемъ сказать въ какомъ видѣ они дали свой способъ; но такъ, какъ даетъ его Лагранжъ, онъ мало отличается, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, отъ способа Ньютона.

СПОСОБЪ НЬЮТОНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНІЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ.

100. За способомъ Вьета слѣдуетъ способъ Ньютона для вычисленія корней алгебраическихъ уравненій. Ньютонъ предполагаетъ, что первое приближенное значеніе искомаго корня уже извѣстно; по этому его способъ, также какъ и способъ Вьета, служитъ только для вычисленія поправки этаго перваго приближенія.

Пусть первое приближенное значеніе корня α уравненія $F(x)=0$ будетъ a; тогда, полагая $\alpha = a + p$, получимъ

$$F(a+p) = F(a) + p\,F'(a) + p^2_0\,F''(a) + \ldots\ldots + p^m = 0 \qquad (1).$$

Но если a довольно близко къ искомому корню, то p должно разсматривать какъ величину весьма малую, которой вторыми и высшими степенями можно пренебрѣгать, и какъ величины $F'(a)$, $F''(a)$, ... не могутъ быть безконечными, по свойству алгебраическихъ функцій, то для вычисленія поправки p мы получимъ уравненіе первой степени

$$F(a) + p\,F'(a) = 0, \qquad (2)$$

изъ котораго

$$p = -\frac{F(a)}{F'(a)} = q.$$

А слѣдовательно второе приближенное значеніе корня будетъ

$$a - \frac{F(a)}{F'(a)} = a'.$$

Чтобы получить новую поправку, Ньютонъ, въ уравненіе (1), вмѣсто p ставитъ $q + r$ и въ результатѣ отбрасываетъ вторыя и высшія степени r. Впрочемъ, какъ предлагаетъ Raphson, для вычисленія каждой новой поправки, можно прямо въ уравненіе (2), вмѣсто перваго приближеннаго значенія корня a, ставить второе a', вмѣсто втораго — третье и т. д.

101. Лагранжъ замѣчаетъ, что способъ Ньютона только тогда можетъ быть безъ всякаго сомнѣнія употребленъ, когда $\alpha - a - p$, по численному значенію, меньше $\alpha - a$, или иначе когда $\frac{1}{\alpha - a - p} > \frac{1}{\alpha - a}$. Въ самомъ дѣлѣ $\alpha - a$ представляетъ погрѣшность перваго приближенія, $\alpha - a - p$ погрѣшность втораго приближенія, и очевидно способъ вычисленія тогда только хорошъ, когда вторая погрѣшность меньше первой. Чтобы судить всегда ли способъ Ньютона удовлетворяетъ этимъ условіямъ, Лагранжъ поступаетъ такимъ образомъ:

Пусть корни уравненія $F(x) = 0$ будутъ α, β, γ, ... мы получимъ:

$$\frac{F'(a)}{F(a)} = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a-\gamma} + \ldots\ldots;$$

а слѣдовательно

$$p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha - a} + R},$$

гдѣ

$$R = \frac{1}{\beta - a} + \frac{1}{\gamma - a} + \ldots\ldots$$

И такъ, погрѣшность втораго приближенія при вычисленіи корня будетъ

$$\alpha - a - p = \frac{R(\alpha - a)}{\frac{1}{\alpha - a} + R};$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha - a - p} = \frac{1}{\alpha - a} + \frac{1}{(\alpha - a)^2 R}.$$

Изъ этаго уравненія очевидно, что по численному значенію $\frac{1}{\alpha - a - p}$ будетъ больше $\frac{1}{\alpha - a}$, если R и $\alpha - a$ будутъ съ одинакими знаками, что возможно только въ томъ случаѣ когда a будетъ больше или меньше всѣхъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія и всѣхъ дѣйствительныхъ частей воображаемыхъ корней, если оно ихъ имѣетъ.

102. Если величина a неудовлетворяетъ этимъ условіямъ, то условіе возможности примѣненія способа Ньютона пишемъ такимъ образомъ

$$\frac{1}{(\alpha - a - p)^2} > \frac{1}{(\alpha - a)^2};$$

но изъ предыдущаго уравненія находимъ

$$\frac{1}{(\alpha - a - p)^2} = \frac{1}{(\alpha - a)^2} + \frac{2}{(\alpha - a)^3 R} + \frac{1}{(\alpha - a)^4 R^2};$$

а слѣдовательно, для удовлетворенія послѣднему неравенству должно полагать

$$\frac{2}{(\alpha - a)^3 R} + \frac{1}{(\alpha - a)^4 R^2} > 0,$$

или

$$2(\alpha - a) R + 1 > 0.$$

Лагранжъ замѣчаетъ, что какъ значеніе R зависитъ отъ другихъ корней β, γ...., которые неизвѣстны, то трудно, и можетъ быть даже невозможно найти *à priori* признакъ по которому можно бы судить—будетъ ли выполнено требуемое условіе, или нѣтъ (*). Та-

(*) Traité de la résolution des équations num. p. 126.

кимъ образомъ Лангранжъ полагаетъ, что способъ Ньютона можетъ быть примѣненъ къ вычисленію только наибольшаго и наименьшаго корня уравненія. Мы уже видѣли что вскорѣ послѣ Лангранжа Фурье показалъ, что способъ Ньютона можно примѣнить къ вычисленію какого угодно дѣйствительнаго корня уравненія.

103. Изъ предыдущаго видно, что различныя приближенныя значенія корня α будутъ $a, a+q, a+q+r, \ldots\ldots$ притомъ

$$q=-\frac{F(a)}{F'(a)}, \quad r=-\frac{F(a+q)}{F'(a+q)}, \quad s=-\frac{F(a+q+r)}{F'(a+q+r)}, \ldots\ldots$$

Легко видѣть, что величина r будетъ весьма малая порядка q^2, величина s весьма малая порядка r^2 и т. д. Въ самомъ дѣлѣ

$$F(a+q)=F(a)+qF'(a)+q_C^2F''(a)+\ldots\ldots$$

Но $q=-\frac{F(a)}{F'(a)}$, а потому

$$F(a+q)=q_C^2F''(a)+\ldots\ldots$$

откуда и заключаетъ что r будетъ порядка q^2.

Если всѣ значенія $q, r, s, \ldots$ развернемъ въ строки и расположимъ ихъ по восходящимъ степенямъ отъ $F(a)$, то для вычисленія корня α получимъ строку

$$\alpha=a-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{[F(a)]^2F''(a)}{2[F'(a)^3}+\frac{[F(a)]^3F'''(a)}{2.3[F'(a)]^4}-\frac{[F(a)]^3F''(a)]}{2[F'(a)]^6}{}^2+\ldots,$$

которая въ первый разъ дана была Эйлеромъ (*).

104. Мы замѣтили, что способъ Вьета или Гарріота, въ томъ видѣ въ какомъ указываетъ на него Лагранжъ, весьма мало отлагается отъ способа Ньютона. Въ самомъ дѣлѣ неравенство

$$p<\frac{C-(a^2+Aa+B)a}{3a^2+2Aa+B},$$

(*) Traité de la résol. des équ. num. par Langrange p. 211.

которое мы имѣли выше для вычисленія поправки перваго приближеннаго значенія a корня уравненія

$$x^3 + Ax^2 + Bx - C = 0,$$

можетъ быть представлено такимъ образомъ

$$p < -\frac{F(a)}{F'(a)}$$

гдѣ $F(a)$ означаетъ первую часть даннаго уравненія со вставкою a вмѣсто x. Въ способѣ Ньютона это неравенство замѣняется равенствомъ.

СПОСОБЪ РОЛЛЯ.

105. До сихъ поръ мы имѣли способы для вычисленія болѣе приближеннаго значенія искомаго корня уравненія, когда первое приближенное значеніе уже извѣстно; но и эти способы, какъ мы видѣли, не могли назваться вполнѣ удовлетворительными, и между тѣмъ главная трудность задачи о рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій, именно отысканіе перваго приближеннаго значенія корней, оставалась еще не тронутою. Отысканіе этихъ первыхъ приближенныхъ значеній основывалось до сихъ поръ на свойствѣ цѣлыхъ раціональныхъ функцій, извѣстномъ еще Кардану (Cardan) (*), и состоящемъ въ томъ, что если въ данное уравненіе, вмѣсто неизвѣстной, поставимъ два числа a и b, такія которыя даютъ результаты съ противными знаками, то между этими числами необходимо находится покрайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень уравненія. На основаніи этой теоремы, очевидно должно было въ данное уравненіе, вмѣсто неизвѣстной величины, подставлять рядъ произвольныхъ чиселъ до тѣхъ поръ пока получатся два результата съ противными знаками. По этому можно представить себѣ какого труда стоило находить первыя приближенныя значенія корней о величинѣ которыхъ предварительно неизвѣстно, а въ особенности корней близкихъ между собою,

(*) Histoire des Sciences Mathém. en Italie , par Libri t. III.

потому что если два числа a и b, подставленныя вмѣсто неизвѣстной въ данное уравненіе даютъ результаты съ одинакими знаками, то изъ этаго еще не слѣдуетъ заключать, что между a и b нѣтъ дѣйствительныхъ корней, весьма можетъ быть, что между этими числами лежатъ два дѣйствительныхъ корня, и очевидно тотъ и другой случай можно отличать только чрезвычайно большимъ числомъ подстановокъ, особенно если корни весьма близки между собою. Мы уже не говоримъ о двухъ корняхъ равныхъ, приближенное значеніе ихъ по этому способу никогда не можетъ быть найдено.

106. Гуддъ (Hudde) уничтожилъ затрудненія относящіяся къ равнымъ корнямъ, показавъ что если уравненію

$$F(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (1)$$

принадлежатъ равные корни, то функція

$$F'(x) = m x^{m-1} + p_1 (m-1) x^{m-2} + p_2 (m-2) x^{m-3} + \ldots + p_{m-1}$$

имѣетъ съ первою общаго дѣлителя, $\psi(x)$, который заключаетъ всѣ равные корни, и слѣдовательно они могутъ быть вычисляемы отдѣльно.

107. Вскорѣ послѣ открытія этаго замѣчательнаго свойства функцій $F(x)$ и $F'(x)$, Ролль (Rolle) открылъ новое ихъ свойство, состоящее въ томъ, что *дѣйствительные корни уравненія* $F(x) = 0$ *имѣютъ границами дѣйствительные корни уравненія* $F'(x) = 0$.

Эту теорему можно доказать такимъ образомъ: пусть

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots \psi(x),$$

гдѣ α, β, γ .... означаютъ дѣйствительные корни уравненія $F(x) = 0$, а $\psi(x)$ содержитъ только воображаемые его корни, и слѣдовательно остается постоянно положительною для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній перемѣнной x. Означимъ

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = f(x),$$

тогда изъ равенства

$$F(x) = f(x) \cdot \psi(x),$$

по дифференцированіи, получимъ

$$F'(x) = f'(x)\,\psi(x) + \psi'(x)\,f(x), \qquad (2)$$

гдѣ

$$f'(x) = (x-\beta)(x-\gamma)\,\ldots\ldots + (x-\alpha)(x-\gamma)\,\ldots\ldots + (x-\alpha)(x-\beta)\,\ldots\ldots$$

Предположимъ теперь, что $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \ldots\ldots$; тогда, поставляя въ уравненіе (2) по порядку вмѣсто x всѣ величины α, β, γ,... и замѣчая, что второй членъ второй части этаго уравненія будетъ уничтожаться отъ каждой изъ этихъ вставокъ, мы очевидно получимъ

$$F'(\alpha) > 0,\ F'(\beta) < 0,\ F'(\gamma) > 0,\ F'(\delta) < 0, \ldots\ldots \qquad (3).$$

Отсюда очевидно, что функція $F'(x)$ имѣетъ дѣйствительные корни, α_1, β_1, γ_1, ... которые лежатъ между границамя α и β, β и γ, γ и δ, и т. д. Теперь нетрудно доказать, что уравненіе (1) не можетъ имѣть болѣе одного дѣйствительнаго корня, который больше самаго большаго изъ корней α_1, β_1, γ_1, ...; не можетъ имѣть больше одного между границами α_1, и β_1, больше одного между границами β_1, и γ_1, и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая $\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1 > \delta_1 > \ldots\ldots$, допустимъ, что два корня α и β будутъ больше α_1; тогда, въ слѣдствіе неравенствъ (3), мы необходимо должны допустить также, что функціи $F'(x)$ принадлежитъ по крайнѣй мѣрѣ одинъ корень большій α_1, а мы назвали α_1 самый большій изъ дѣйствительныхъ корней уравненія $F'(x) = 0$. Подобнымъ образомъ, предполагая, что между α_1 и β_1 лежатъ два дѣйствительныхъ корня α и β уравненія (1), въ слѣдствіе неравенствъ (3), должны будемъ допустить, что уравненію $F'(x) = 0$ принадлежитъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень лежащій между границами α и β_1 и слѣдовательно между α_1 и β_1, что опять противорѣчитъ предположенію. Точно также докажемъ, что уравненію (1) не можетъ принадлежать больше одного дѣйствительнаго корня который меньше самаго меньшаго изъ корней α_1, β_1, γ_1, ...

Отсюдо очевидно, что если въ уравненіи (1) всѣ корни дѣйствительные, то, въ слѣдствіе неравенствъ (3), и всѣ корни всѣхъ производныхъ функцій отъ $F(x)$ будутъ также дѣйствительные.

108. Основываясь на этой теоремѣ, Ролль первый далъ способъ для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій, способъ находить первыя приближенныя значенія корней этихъ уравненій. Способъ этотъ онъ назвалъ *способомъ каскадъ* (Methode des cascades).

Прежде чѣмъ приступимъ къ изложенію способа каскадъ, обратимъ вниманіе на тѣ преобразованія, которыхъ этотъ способъ требуетъ иногда отъ данныхъ уравненій.

Для примѣненія способа каскадъ должно:

1) Привести уравненіе къ такому виду, чтобы коеффиціентъ при высшей степени неизвѣстной величины былъ единица, а коеффиціенты прочихъ членовъ цѣлыя числа.

Пусть дано уравненіе

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m = 0, \qquad (4)$$

въ которомъ коеффиціенты какія угодно числа. Раздѣляя все уравненіе на p_0, а затѣмъ полагая $x = \frac{y}{k}$, гдѣ k величина пока произвольная, получимъ

$$\frac{y^m}{k^m} + \frac{p_1}{p_0}\frac{y^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{p_2}{p_0}\frac{y^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots + \frac{p_{m-1}}{p_0}\frac{y}{k} + \frac{p^m}{p_0} = 0,$$

или, помножая все уравненіе на k^m,

$$y^m + \frac{p_1}{p_0}ky^{m-1} + \frac{p_2}{p_1}k^2y^{m-2} + \frac{p_3}{p_0}k^3y^{m-3} + \ldots + \frac{p_{m-1}}{p_0}k^{m-1}y + \frac{p_m}{p_0}k^m = 0.$$

Теперь очевидно, что если $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \frac{p_3}{p_0}, \ldots \frac{p_m}{p_0}$ числа дробныя, то взявъ для k величину наименьшаго кратнаго всѣхъ знаменателей этихъ дробей, мы получимъ уравненіе

$$y^m + q_1y^{m-1} + q_2y^{m-2} + q_3y^{m-3} + \ldots + q_{m-1}y + q_m = 0, \qquad (5)$$

въ которомъ всѣ коеффиціенты $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$ числа цѣлыя.

2) Нужно уравненіе преобразовать такимъ образомъ, чтобы изъ дѣйствительныхъ корней ему принадлежали только одни положительные. Для этаго Ролль вмѣсто неизвѣстной y ставитъ разность $r - x$, означая чрезъ r самый большій отрицательный коэффиціентъ даннаго уравненія увеличенный единицею. Такое преобразованіе дѣйствительно всегда приведетъ къ желаемому результату. Въ самомъ дѣлѣ, пусть q_s означаетъ самый большій коэффиціентъ уравненія (5); очевидно въ выраженіи

$$y^m - q_s(y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots + y + 1)$$

положительная часть не можетъ быть больше положительной части уравненія (5); а отрицательная часть не можетъ быть меньше отрицательной части того же уравненія; а слѣдовательно если найдемъ такое значеніе $y = r$, которое дѣлаетъ эту разность положительною, то всѣ значенія $y > r$, будутъ, какъ эту разность, такъ и первую часть уравненія (5) дѣлать положительною, а это значитъ, что для уравненія (5) не можетъ быть ни одного положительнаго корня большаго r. Но предыдущая разность можетъ быть написана такимъ образомъ.

$$y^m - q_s \frac{y^m - 1}{y - 1},$$

или

$$\frac{y^m(y - 1 - q_s) + q_s}{y - 1},$$

а отсюда очевидно, что если возмемъ $y = q_s + 1$ или $> q_s + 1$, то это выраженіе будетъ постоянно положительнымъ.

109. Предположимъ теперь, что изъ каждаго корня уравненія (5) вычтена величина $q_s + 1$ или r т. е. предположимъ, что вмѣсто y въ это уравненіе поставлено $x + r$, тогда преобразованное уравненіе будетъ имѣть всѣ корни отрицательные, т. е. всѣ коэффиціенты этаго уравненія будутъ положительны; ставимъ теперь—x вмѣсто x, что очевидно приводится къ подстановкѣ въ уравненіе (5) прямо $r - x$ вмѣсто y, тогда получимъ уравненіе

$$x^m - s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} - s_3 x^{m-3} + \ldots \pm s_{m-1} x \pm s_m = 0,$$

котораго всѣ корни будутъ положительные, а коеффиціенты поперемѣнно положительны и отрицательны.

Единственная цѣль такого подготовленія данныхъ уравненій есть упрощеніе счета.

110. Предположимъ теперь, что дано уравненіе приготовленное уже для облегченія способа Ролля;

$$f(x) = x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - p_3 x^{m-3} + \ldots \pm p_{m-1} x \mp p_m = 0.$$

По способу Ролля составляемъ изъ этаго уравненія рядъ слѣдующихъ такимъ образомъ: каждый членъ множимъ на показателя его степени, незабывая и нульную, потомъ результатъ дѣлимъ на x и уравниваемъ нулю; мы получимъ

$$mx^{m-1} - (m-1)\,p_1 x^{m-2} + (m-2)\,p_2 x^{m-3} - \ldots \mp p_{m-1} = 0.$$

Съ этимъ уравненіемъ поступаемъ также какъ и съ предыдущимъ, только съ тою разницей, что всѣ его члены дѣлимъ на $2x$, тогда получимъ

$$\frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} p_1 x^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} p_2 x^{m-4} - \ldots$$
$$\mp \frac{2 p_{m-2}}{2} = 0.$$

Изъ этаго уравненія получимъ точно также новое, раздѣляя только всѣ его члены на $3x$, и т. д. поступаемъ до тѣхъ поръ пока получимъ уравненіе 1-й степени, которое очевидно будетъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.2}{1.2.3\ldots.(m-1)} x - \frac{(m-1)(m-2)\ldots.2.1}{1.2.3\ldots.(m-1)} p_1 = 0,$$

или

$$mx - p_1 = 0.$$

Рядъ такимъ образомъ полученныхъ уравненій, по знакоположенію дифференціальнаго исчисленія, будетъ слѣдующій

$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ \frac{1}{2}f''(x)=0,\ \frac{1}{1.2.3}f'''(x)=0,\ \ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(x)=0.$$

111. Чтобы лучше понять какимъ образомъ Ролль пользуется этимъ рядомъ уравненій, которыя онъ называетъ *каскадами*, для опредѣленія границъ, между которыми лежатъ дѣйствительные корни даннаго уравненія, мы разсмотримъ три случая:

1-й случай. Всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные и неравные между собою. Напишемъ каскады этаго уравненія въ такомъ порядкѣ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(x)=0\\ \frac{1}{1.2.3\ldots(m-2)}f^{(m-2)}(x)=0\\ \frac{1}{1.2.3\ldots(m-3)}f^{(m-3)}(x)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}(a)\left\{\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{2}f''(x)=0,\\ f'(x)=0\\ f(x)=0\end{array}\right.$$

Такъ какъ, по предположенію, данное уравненіе имѣетъ всѣ корни положительные дѣйствительные и неравные между собою, то, въ слѣдствіе теоремы доказанной нами выше, и корни каждаго изъ предыдущихъ уравненій будутъ также положительные дѣйствительные и неравные, притомъ границами корней каждой каскады будутъ корни каскады предыдущей. Но первая каскада первой степени, слѣдовательно ея корень находится непосредственно; пусть онъ будетъ a. Тогда корни второй каскады, будутъ лежать между границами

$$0,\ a \text{ и } p_r+1,$$

гдѣ p_r означаетъ наибольшій отрицательный коеффиціентъ второй каскады раздѣленный на коеффиціентъ высшей степени неизвѣстной въ этой каскадѣ. И въ самомъ дѣлѣ корни второй каскады положительны, слѣдовательно наименьшая ихъ граница

есть нуль, а наибольшій дѣйствительный корень не можетъ быть болѣе $p_r + 1$, какъ мы выше доказали. И такъ одинъ изъ корней второй каскады необходимо лежитъ между границами 0 и a, другой между a и $p_r + 1$.

112. Границы эти Ролль называетъ *гипотезами*, 0 *меньшею*, $p_r + 1$ *большею*, а остальныя — *средними*.

При помощи гипотезъ 0 и a, a и $p_r + 1$, подставляя во вторую каскаду среднія числа, находимъ, или истинное, или приближенное значеніе корней этой каскады. Пусть они будутъ a', b'. Переходимъ къ слѣдующей каскадѣ, третьей степени; границами ея корней будутъ числа

$$0, \quad a', \quad b', \quad p'_r + 1,$$

гдѣ p'_r имѣетъ тоже значеніе относительно третьей каскады, какое имѣетъ p_r относительно второй. Корни третьей каскады вычисляемъ такимъ же образомъ какъ и второй каскады, и находимъ границы корней четвертой каскады, и т. д. продолжаемъ до послѣдней каскады, т. е. до уравненія даннаго.

Возмемъ въ примѣръ уравненіе

$$x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384 = 0$$

каскады этаго уравненія будутъ

$$4x - 20 = 0,$$

$$6x^2 - 60x + 140 = 0,$$

$$4x^3 - 60x^2 + 280x - 400 = 0,$$

$$x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384 = 0.$$

Корень первой каскады равенъ 5; такъ какъ наибольшій отрицательный коеффиціентъ второй каскады 60, а коеффиціентъ высшей степени ея 6, то для нее $p_r + 1 = 11$. А слѣдовательно границы корней второй каскады будутъ

$$0, \quad 5, \quad 11,$$

и дѣйствительно при вставкѣ первой изъ нихъ во вторую каскаду, вмѣсто неизвѣстной, мы получимъ въ результатѣ +, при втавкѣ второй −, при вставкѣ третьей снова +.

Чтобы найдти значенія корней, лежащихъ между этими границами, Ролль вставляетъ въ разсматриваемую каскаду числа среднія между первою и второю границею, потомъ между второю и третьею. Такимъ образомъ найдемъ, что первый корень второй каскады будетъ лежать между 3, 7 и 3, 8; второй между 6, 5 и 6, 6. Примемъ за истинное значеніе корней второй каскады 3, 7 и 6. 5; тогда границы корней третьей каскады, или уравненія

$$x^3 - 15x^2 + 70x - 400 = 0$$

будутъ

$$0, \quad 3{,}7, \quad 6{,}5, \quad 401.$$

И дѣйствительно, вставка перваго изъ этихъ чиселъ въ третью каскаду даетъ результатъ −, втораго +, третьяго, −, четвертаго снова +. Но легко замѣтить, что мы получимъ тѣ же перемѣны знаковъ если вмѣсто чиселъ 3, 7 в 6, 5 возмемъ просто 3, и 6, а потому, для легкости счета, примемъ границами корней третьей каскады

$$0, \quad 3, \quad 6, \quad 401.$$

Чрезъ подставленіе среднихъ чиселъ между этими границами, найдемъ, что первый корень третьей каскады лежитъ между 2, 4 и 2, 5, второй равенъ 5, третій лежитъ между 7, 2 и 7, 3.

Такимъ образомъ, слѣдовательно, за границы корней послѣдней каскады, или даннаго уравненія мы можемъ принять числа

$$0, \quad 2{,}5, \quad 5, \quad 7{,}2, \quad 50,$$

при помощи которыхъ и находимъ, что корни даннаго уравненія будутъ $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ $x_3 = 6$ $x_4 = 8$.

113. *2-й случай.* Предположимъ, что нѣкоторые изъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія $f(x) = 0$ равны между собою. Тогда

эти корни будутъ принадлежать и производной функціи, $f'(x)$ для которой число равныхъ корней будетъ единицею меньше противъ начальной. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, между каскадами даннаго уравненія найдется такая, одинъ изъ корней которой не будетъ уже разграничивать два корня слѣдующей каскады, а будетъ имъ равенъ, и слѣдовательно разсмотрѣніе смѣжныхъ съ этими корнями границъ становится излишнимъ. Напримѣръ, если корни одной изъ каскадъ означимъ $a, b, c,$ то границы корней слѣдующей каскады будутъ

$$0, \quad a, \quad b, \quad c, \quad p_r + 1,$$

и если допустимъ, что вставка величины b, напримѣръ, въ слѣдующую каскаду даетъ въ результатѣ нуль, тогда очевидно что оба корня этой послѣдней, между a и b и между b и c, равны b и слѣдовательно разсмотрѣніе цѣлаго промежутка отъ a до c, становится излишнимъ.

Слѣдующая за этою каскада, очевидно будетъ имѣть уже три корня равныхъ b, и т. д. до послѣдней, число равныхъ корней которой зависитъ отъ числа предыдущихъ каскадъ имѣющихъ равные корни, такъ что если означимъ r число каскадъ, начиная отъ той въ которой въ первый разъ встрѣтились два корня равные b и до послѣдней включительно, то данное уравненіе корней равныхъ b будетъ имѣть $r + 1$.

Равные дѣйствительные корни Ролль называетъ *недостаточными корнями перваго рода*. Какъ примѣръ этаго случая возмемъ уравненіе

$$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32 = 0;$$

каскады этаго уравненія будутъ

$$2x - 5 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$2x^3 - 15x^2 + 36x - 28 = 0,$$
$$x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32 = 0.$$

Корень первой каскады 2,5, и слѣдовательно границы корней второй каскады будутъ 0, 2,5, 6, при помощи которыхъ легко находимъ, что первый корень этой каскады равенъ 2, второй 3. И такъ для границъ корней третьей каскады мы получимъ числа

0, 2, 3, 15.

Но вставка числа 2 въ эту каскаду даетъ въ результатѣ нуль, а слѣдовательно оба ее корня которые должны лежать между границами 0 и 2, 2 и 3 равны между собою и равны 2; по этому разсмотрѣніе всего промежутка отъ 0 до 3 становится излишнимъ, и намъ останется только найдти корень который лежитъ между 3 и 15. Этотъ корень будетъ 3,5. Такъ какъ слѣдующая каскада, или данное уравненіе, должно имѣть три корня равныхъ 2, то для нее нужно только найдти корень лежащій между 3, 5 и 5, 7. Этотъ корень будетъ 4. И такъ данное уравненіе имѣетъ три корня равныхъ 2 и одинъ равный 4.

114. *3-й случай.* Данное уравненіе, кромѣ дѣйствительныхъ, можетъ имѣть и воображаемые корни.

Каковы бы нибыли корни даннаго уравненія, въ слѣдствіе теоремы Ролля мы можемъ заключать, что между двумя сосѣдними дѣйствительными корнями какой нибудь каскады не можетъ лежать болѣе одного дѣйствительнаго корня слѣдующей каскады. Такъ что, слѣдовательно, если $a, b, c, \ldots$, означаютъ дѣйствительные корни какой нибудь каскады A, и подстановленіе, напримѣръ величинъ b и c въ слѣдующую каскаду B не даетъ перемѣны знаковъ, то это ясный признакъ что каскада B, а равно и слѣдующія за ней имѣютъ воображаемые корни. И легко видѣть, что сколько въ ряду результатовъ

$$(0),\quad (a),\quad (b),\quad (c),\ldots..$$

подставленія корней каскады A въ каскаду B будетъ послѣдовательностей знаковъ, столько же эта послѣдняя имѣетъ воображаемыхъ корней.

Возмемъ въ примѣръ уравненіе

$$x^3 + 2x + x = 0.$$

Чтобы привести его къ виду удобному для примѣненія способа Ролля, полагаемъ по общему правилу

$$x = 1 - y,$$

получимъ

$$y^3 - 5y^2 + 7y - 6 = 0.$$

Каскады этаго уравненія будутъ

$$3y - 5 = 0,$$

$$3y^2 - 10y + 7 = 0,$$

$$y^3 - 5y^2 + 7y - 6 = 0.$$

Первая изъ нихъ даетъ $y = \frac{5}{3}$, и слѣдовательно границы корней второй каскады будутъ

$$0, \quad \frac{5}{3} \quad \text{и} \quad 11.$$

И дѣйствительно отъ подставленія первой изъ нихъ во вторую каскаду получимъ въ результатѣ +, отъ подставленія второй — и отъ подставленія третьей +. Легко видѣть, что первый изъ дѣйствительныхъ корней этой каскады будетъ 1, второй лежитъ между 2 и 3. И такъ границы корней третьей каскады будутъ

$$0, \quad 1, \quad (2 + \theta), \quad 7.$$

Вставляемъ эти числа въ третью каскаду, мы получимъ рядъ знаковъ

$$- \quad - \quad - \quad +. \qquad (m).$$

Двѣ послѣдовательности знаковъ указываютъ на содержаніе двухъ воображаемыхъ корней въ третьей каскадѣ, а третій корень будетъ дѣйствительный, и легко видѣть, что онъ лежитъ между 3 и 4.

115. Примѣръ этотъ выбранъ нами изъ довольно рѣдкихъ: здѣсь корень второй каскады 1 раціональный и слѣдовательно опредѣленъ съ точностію, такъ что послѣдовательность знаковъ въ ряду (m), отъ вставки 0 и 1 въ третью каскаду, прямо указываетъ на содержаніе въ ней воображаемыхъ корней. Въ большей части случаевъ корни бываютъ ирраціональные, и слѣдовательно могутъ быть вычислены только приближенныя ихъ значенія. Предположимъ теперь, что приближенныя значенія корней каскады A будутъ a', b', c', ... Подставляя эти числа въ слѣдующую каскаду B, получимъ рядъ знаковъ

$$(0),\quad (a'),\quad (b'),\quad (c'),\ldots\ldots$$

Предположимъ, что въ этомъ ряду мы встрѣтили между (0) и (a'), не перемѣну знаковъ, какъ бы слѣдовало въ случаѣ дѣйствительнаго корня каскады B, между границами 0 и a', но послѣдотельность знаковъ, очевидно изъ этаго нельзя еще заключить, что каскада B имѣетъ воображаемые корни, ибо можетъ случится, что приближенное значеніе корня a' каскады A вычислено еще не съ достаточною точностію, и что корни каскады B весьма близки къ a'. Ролль для отличія дѣйствительныхъ корней отъ воображаемыхъ, въ этомъ случаѣ, даетъ эмпирическое правило, состоящее въ слѣдующемъ: если подставленіе въ каскаду B трехъ меньшихъ приближенныхъ значеній корня каскады A даетъ результаты съ одинакими знаками и притомъ противными тому который слѣдовало бы получить въ случаѣ дѣйствительныхъ корней и если число превосходящихъ цифръ каждаго результата противъ предыдущаго равно показателю степени уравненія, то каскада B имѣетъ воображаемые корни. При этомъ предполагается, что приближенныя значенія корня каскады A разнятся между собою на одну десятичную цифру. Сомнѣваемся чтобы это правило было общимъ, мы скажемъ только что здѣсь слу-

чай воображаемыхъ корней, можно отличить совершенно такимъ же образомъ какъ отличаетъ его въ своемъ способѣ Фурье.

116. Замѣтимъ еще, что для вычисленія болѣе точнаго значенія ирраціональныхъ корней, когда первыя приближенныя ихъ значенія извѣстны, Ролль предлагаетъ въ данное уравненіе ставить вмѣсто x, $\frac{x}{10}$ или $\frac{x}{100}$ или $\frac{x}{1000}$ и т. д. смотря по степени приближенія и искать границы между которыми лежитъ корень полученныхъ такимъ образомъ уравненій. Такъ если найдемъ, что корень уравненія полученнаго отъ подставленія величины $\frac{x}{100}$ вмѣсто x будетъ лежать между 45 и 46, тогда очевидно корень даннаго уравненія лежитъ между 0,45 и 0,46. Легко видѣть неудобства этаго способа.

Способъ каскадъ, какъ мы видимъ изъ предыдущаго, кромѣ недостатка въ теоретическомъ отношеніи въ случаѣ воображаемыхъ корней представляетъ огромныя затрудненія и для опредѣленія границъ дѣйствительныхъ корней, довольно сказать, что вмѣсто одного уравненія приходится рѣшить столько уравненій сколько единицъ въ показателѣ степени даннаго уравненія.

СПОСОБЪ ФОНТЕНЯ.

117. Ролль, какъ мы видѣли, далъ способъ для отысканія границъ и приближеннаго вычисленія только дѣйствительныхъ корней алгебраическихъ уравненій. Въ 1747 г. Фонтень предложилъ способъ посредствомъ котораго онъ думалъ дать полное рѣшеніе алгебраическихъ уравненій, т. е. по данному уравненію вычислить какъ дѣйствительные, такъ и воображаемые корни его. Фонтень говоритъ о своемъ способѣ — Je la donne pour l'Analyse en entier que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'Algébre (*).

(*) Résolut. des équations numeriques par Lagrange p. 138.

118. Фонтень разсматриваетъ всякую цѣлую раціональную функцію одной перемѣнной какъ произведеніе столькихъ линейныхъ, дѣйствительныхъ или воображаемыхъ, множителей, сколько въ показателѣ степени функціи единицъ, и какъ такая функція уничтожается когда уничтожается одинъ изъ этихъ множителей, то для каждой цѣлой раціональной функціи Фонтень ищетъ ту систему множителей, которая ей принадлежитъ. Если такая система множителей, $(x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)$ ..... найдена для какой нибудь функціи $F(x)$, тогда очевидно α, β, γ, ... будутъ корни уравненія $F(x)=0$, ибо $F(\alpha)$, $F(\beta)$, $F(\gamma)$, ... тождественно равны нулю.

119. Чтобы отыскать этихъ множителей для данной функціи, Фонтень вводитъ въ нихъ неопредѣленныя величины a, b, c,... которыхъ число равняется показателю степени функціи. Предполагая, что a, b, c, ... всѣ величины положительныя, дѣйствительныя, которыя могутъ быть равны и нулю или между собою, а въ случаѣ неравенства $a>b>c>$..... Фонтенъ составляетъ всѣ возможныя комбинаціи изъ множителей $x\pm a$, $x\pm b$, $x\pm c$, ... $x\pm a\pm b\sqrt{-1}$, $x\pm b\pm a\sqrt{-1}$, $x\pm a\pm c\sqrt{-1}$, $x\pm c\pm a\sqrt{-1}$, ... такъ чтобы каждая система множителей составила въ произведеніи функцію одинаковой степени съ данною. Потомъ для каждой системы множителей онъ находитъ изъ коеффиціентовъ данной функціи условіе, которое должно отличать одну систему отъ другой. Напримѣръ для уравненій 2-й степени Фонтень даетъ слѣдующія условія

$x^2+mx+n=0$

Множители.	*Условія.*
$(x+a)(x+a)$	$m^2-4n=0$,
$(x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$	$m^2-2n=0$,
$(x+a)\ (x+b)$	$m^2-4n<0$,
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$	$\begin{cases} m^2-4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases}$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$	$m^2-2n<0$

	Множители.	*Условія.*
$x^2+mx+n=0$,		
$x^2-mx+n=0$	$(x-a)(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$m^2-4n=0$,
	$(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})\ldots\ldots\ldots$	$m^2-2n=0$,
	$(x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$m^2-4n>0$,
	$(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})\ldots\ldots$	$m^2-4n<0$, $m^2-2n>0$,
	$(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\ldots\ldots$	$m^2-2n<0$.
$x^2-mx+n=0$,	$(x-a)(x+b)$,	
$x^2+n=0$,	$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$,	
$x^2-n=0$	$(x+a)(x-a)$.	

Во всѣхъ этихъ уравненіяхъ m и n предполагаются величинами положительными.

Составивъ такую таблицу, очевидно легко въ каждомъ данномъ случаѣ пріискать условіе, которому удовлетворяютъ коеффиціенты даннаго уравненія, а по условію опредѣлить и видъ множителей, изъ которыхъ можетъ быть оно составлено, т. е. видъ его корней.

120. Составленіе этихъ таблицъ для уравненія второй степени не представляетъ большаго труда. Въ самомъ дѣлѣ легко замѣтить, что условія выраженныя *равенствами* $m^2-4n=0$, $m^2-2n=0$ принадлежатъ тому случаю, когда величины a и b равны между собою или когда одна изъ нихъ равна нулю. Эти условія находятся прежде другихъ и притомъ очень просто: для этаго должно только развернуть скобки множителей и сравнить коеффиціенты полученнаго произведенія съ коеффиціентами даннаго уравненія. Напримѣръ, развертывая произведеніе $(x-a)(x-a)$, получимъ:

$$x^2-2ax+a^2=x^2-mx+n,$$

откуда,

$$2a=m,\quad a^2=n,$$

а исключая отсюда a и получимъ условіе

$$m^2-4n=0,$$

которое отличаетъ систему множителей, $(x-a)\,(x-a)$, отъ всѣхъ прочихъ.

Замѣчая теперь, что системы множителей $(x-a)\,(x-b)$, $(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$ совпадаютъ съ системою $(x-a)\,(x-a)$, когда въ первой примемъ $b=a$, во второй $b=0$, легко видѣть что для системы $(x-a)\,(x-b)$ функція $m^2-4n>0$; а для системы $(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$, $m^2-4n<0$. Подобнымъ же образомъ находятся и прочія условія. При этомъ предполагается только, *что функція коеффиціентовъ* m, n, *которая равна нулю въ случаѣ совпаденія двухъ системъ, вслѣдствіе равенства величинъ* a *и* b, *будетъ больше нуля для одной системы и меньше нуля для другой системы.* Относительно уравненій второй степени предположеніе это легко повѣрить; но, какъ замѣчаетъ весьма справедливо Лагранжъ (*), оно не можетъ быть допущено безъ доказательства.

121. Составленіе таблицъ множителей для уравненій высшихъ степеней, даже начиная съ третьей, становится уже весьма затруднительнымъ, такъ что хотя Фонтень составилъ таблицы для уравненій 3-й и 4-й степени; но уже въ нихъ Лагранжъ нашелъ погрѣшности, которыя приводятъ къ совершенно ложнымъ заключеніямъ о видѣ корней.

Даламбертъ предполагаетъ, что для удаленія всякаго недоразумѣнія въ способѣ Фонтеня достаточно доказать слѣдующее: пусть $P=0$ представляетъ условіе между коеффиціентами даннаго уравненія въ случаѣ равенства нѣкоторыхъ изъ величинъ a, b, c... Называя $2t$ разность между ними въ случаѣ ихъ неравенства, вмѣсто P получимъ: $P+Rt+Qt^2+\cdots\cdots$ Довольно доказать, 1° что наименьшая степень величины t въ послѣднемъ выраженіи всегда нечетная, 2°, что предполагая t положительнымъ, выраженіе

$$Rt+Qt^2+\cdots\cdots$$

(*) Traité de la résol. des équat. num. par Lagrange p. 140.

сохраняетъ свой знакъ для всякаго численнаго значенія t, 3° для t отрицательнаго, при всякой его численной величинѣ,

$$Rt + Qt^2 + \ldots\ldots$$

сохраняетъ знакъ противный тому, который выраженіе это имѣло для t положительнаго (*). Но послѣ замѣчанія сдѣланнаго Лагранжемъ, легко видѣть, что и теоремъ указанныхъ Даламбертомъ недостаточно для справедливости способа Фонтеня. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе $P = 0$, которое должно отличать соотвѣтствующую систему множителей отъ всѣхъ другихъ, какъ это необходимо требуетъ способъ Фонтеня, не всегда принадлежитъ одной только системѣ. Лагранжъ нашелъ, напримѣръ, что условное уравненіе

$$2m^3 - mn - p = 0,$$

которое для уравненія 3-ей степени,

$$x^3 + mx^2 - nx - p = 0,$$

въ способѣ Фонтеня принадлежитъ одной только системѣ множителей

$$(x - a)\left(x + a + b\sqrt{-1}\right)\left(x + a - b\sqrt{-1}\right),$$

имѣетъ мѣсто и для всякой системы множителей вида $(x + a)$ $(x + b)$ $(x + c)$ если только $a + c = 2b$. И конечно нѣтъ причины думать, чтобы подобные случаи не встрѣтились и въ уравненіяхъ высшихъ степеней.

Изъ этаго легко видѣть, что чрезвычайно трудно, а можетъ быть и невозможно, найдти условія, которыя отличали бы одну систему множителей отъ другой для уравненій высшихъ степеней.

122. Какъ бы то нибыло, предполагая, что для уравненій всѣхъ степеней составлены таблицы линейныхъ множителей, Фонтень даетъ слѣдующій способъ для вычисленія величинъ a, b, c, ... входящихъ въ эти множители.

(*) Encyclopedie par D'Alambert. *Equation.*

Развертывая произведеніе пріискапныхъ линейныхъ множителей, Фонтень сравниваетъ коеффиціенты при степеняхъ перемѣнной съ коеффиціентами даннаго уравненія. Изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій онъ исключаетъ всѣ неопредѣленныя величины a, b, c,.... кромѣ двухъ. Пусть эти оставшіяся величины будутъ a и b, результатъ исключенія прочихъ будетъ состоять изъ двухъ уравненій, которыя мы напишемъ такимъ образомъ:

$$f(a, b) = 0, \quad f_1(a, b) = 0.$$

Фонтень полагаетъ въ этихъ уравненіяхъ $a=\alpha R$, $b = \beta R$ и изъ результатовъ вставки исключаетъ R. Тогда получается однородное уравненіе между α и β,

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

въ которомъ онъ ставитъ вмѣсто α и β такія выраженія:

$$\alpha = x\psi + y, \quad \beta = z\psi + u.$$

Неопредѣленныя величины x, y, z, u, Фонтень выбираетъ сначала такимъ образомъ

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad u = 1;$$

тогда очевидно

$$\alpha = \psi, \quad \beta = 1, \quad F(\psi) = 0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи, вмѣсто ψ, онъ ставитъ рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ 1, 2,.... до тѣхъ поръ пока получатся результаты съ противными знаками. Пусть

$$F(n) > 0, \quad F(n + 1) < 0.$$

Полагаемъ $\psi = n$; слѣдовательно $\alpha = n$, $\beta = 1$.

Затѣмъ относительно x, y, z, u дѣлаются такія предположенія

$$x = n, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad u = 0.$$

Тогда

$$\alpha = n\psi + 1, \ \beta = \psi \ \text{ и } \ F(n\psi + 1, \psi) = 0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи снова ставимъ вмѣсто ψ числа 1, 2, 3,...

до тѣхъ поръ, пока получимъ результаты съ противными знаками; вмѣсто ψ беремъ меньшее число и опредѣляемъ значенія α и β изъ уравненій

$$\alpha = n\psi + 1, \quad \beta = \psi.$$

Это дѣйствіе можно продолжать, по теоріи Фонтеня, неопредѣленно, поставляя каждый разъ, вмѣсто x послѣднее значеніе α, вмѣсто y предпослѣднее, вмѣсто z послѣднее значеніе β, вмѣсто u предпослѣднее. Для каждой пары значеній α и β изъ уравненій $f(\alpha R, \beta R) = 0$, или $f_1(\alpha R, \beta R) = 0$ опредѣляется значеніе R, а за тѣмъ и значенія a и b по уравненіямъ $a = \alpha R$, $b = \beta R$.

Чтобы пояснить эту теорію примѣромъ, возмемъ уравненіе

$$x^2 - 3x + 5 = 0.$$

По таблицѣ множителей отвѣчающихъ виду $x^2 - mx + n = 0$ находимъ, что система множителей этаго уравненія будетъ $(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1}) = x^2 + 2bx + (a^2 + b^2)$. Слѣдовательно

$$2b = 3, \quad a^2 + b^2 = 5,$$

полагая здѣсь $a = \alpha R$, $b = \beta R$ и изключая R, получимъ однородное уравненіе между α и β,

$$9\alpha^2 - 11\beta^2 = 0, \qquad (1).$$

притомъ

$$R = \frac{3}{2\beta}. \qquad (2).$$

Вмѣсто α и β въ уравненіе (1) должно вставить $\alpha = x\psi + y$, $\beta = z\psi + u$, дѣлая относительно x, y, z, u слѣдующія предположенія

1° $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$.

Тогда $\alpha = \psi$, $\beta = 1$ и уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$9\psi^2 - 11 = 0.$$

Поставляя здѣсь вмѣсто ψ числа 1, 2, находимъ, что они даютъ результаты съ противными знаками, а потому принимаемъ $\psi = 1$. И такъ

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad R = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{2}.$$

2° $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$.

Тогда $\alpha = \psi + 1$, $\beta = \psi$, и слѣдовательно уравненіе (1) приметъ видъ

$$2\psi^2 - 18\psi - 9 = 0.$$

Поставляя здѣсь вмѣсто ψ числа 1, 2, 3.... находимъ, что 9 и 10 даютъ результаты съ противными знаками, поэтому принимаемъ $\psi = 9$; а слѣдовательно

$$\alpha = 10, \quad \beta = 9, \quad R = \frac{3}{18}, \quad a = \frac{30}{18}, \quad b = \frac{27}{18}.$$

3° $x = 10$, $y = 1$, $z = 9$, $u = 1$.

Тогда $\alpha = 10\psi + 1$, $\beta = 9\psi + 1$ и

$$9\psi^2 - 18\psi - 2 = 0.$$

Поставляя здѣсь $\psi = 1$, 2, 3,... находимъ что 2 и 3 даютъ результаты съ противными знаками; по этому беремъ $\psi = 2$, что доставитъ

$$\alpha = 21, \quad \beta = 19, \quad R = \frac{3}{38}, \quad a = \frac{63}{38}, \quad b = \frac{57}{38}.$$

4° $x = 21$, $y = 10$, $z = 19$, $u = 9$.

Въ этомъ случаѣ $\alpha = 21\psi + 10$, $\beta = 19\psi + 9$ и

$$2\psi^2 - 18\psi - 9 = 0.$$

Здѣсь 9 и 10 даютъ результаты съ противными знаками; слѣдовательно $\psi = 9$. И такъ

$$\alpha = 199, \quad \beta = 180, \quad R = \frac{3}{360}, \quad a = \frac{597}{360}, \quad b = \frac{540}{360}.$$

И такъ далѣе.

123. Этотъ способъ приближеннаго вычисленія корней, который Фонтень далъ безъ доказательства, требуетъ необходимо, чтобы уравненіе служащее для опредѣленія ψ имѣло одинъ положи-

тельный дѣйствительный корень, или если нѣсколько, то разность между ними должна быть болѣе единицы. Лагранжъ уже замѣтилъ, что это не всегда имѣетъ мѣсто, что и подтвердилъ примѣромъ взятымъ изъ уравненій третьей степени. Кромѣ того если бы этотъ способъ приближеннаго вычисленія величинъ $a, b, c...$ былъ даже справедливъ, то во первыхъ приближеніе весьма медленно и во вторыхъ, что весьма важно, здѣсь мы не имѣемъ никакой возможности судить о предѣлахъ погрѣшности въ вычисленіи.

Все это заставляетъ сознаться, что способъ Фонтеня не можетъ имѣть практическаго примѣненія.

СПОСОБЪ ЛАГРАНЖА.

124. Двадцать лѣтъ прошло съ того времени какъ Фонтень предложилъ свой способъ для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій и вопросъ этотъ оставался на той точкѣ, на которой онъ оставилъ его. Въ промежукѣ этого времени большая часть геометровъ, которые могли бы подвинуть анализъ численныхъ уравненій, обратили все свое вниманіе на усовершенствованіе новаго вычисленія открытаго Ньютономъ и Лейбницемъ. Наконецъ, сознавая всю важность задачи о рѣшеніи численныхъ алгебраическихъ уравненій и вмѣстѣ съ тѣмъ видя, что всѣ способы, которые были до сихъ поръ предложены для рѣшенія этой задачи, далеко не могутъ назваться совершенными, не только въ практическомъ, но и въ теоретическомъ отношеніи, Лагранжъ рѣшился обратить свое вниманіе на эту задачу. Въ 1767 г. онъ напечаталъ въ мемуарахъ Берлинской академіи результатъ своего труда.

125. Лагранжъ въ основаніе своего способа принимаетъ слѣдующія теоремы:

1) *Если въ алгебраическое уравненіе съ численными коэффиціентами*

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (1)$$

вмѣсто неизвѣстной величины x поставимъ два числа a и b которыя даютъ результаты

$$a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} a + p_m \qquad [a]$$

$$b^m + p_1 b^{m-1} + p_2 b^{m-2} + \ldots\ldots + p_{m-1} b + p_m, \qquad [b]$$

съ противными знаками, то между числами a и b находится по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень уравненія (1).

2) *Если въ алгебраическое уравненіе* (1) *поставимъ вмѣсто x два числа a и b изъ которыхъ одно меньше а другое больше дѣйствительнаго корня x_1 этаго уравненія и если при томъ разность $a - b$ меньше нежели разность между корнемъ x_1 и всѣми прочими корнями этаго уравненія, то результаты* [a] *и* [b] *будутъ необходимо съ противными знаками.*

126. Для отысканія границъ между которыми находится каждый дѣйствительный корень даннаго уравненія Лагранжъ пользуется этими теоремами такимъ образомъ. Назовемъ Δ число меньшее наименьшей разности между корнями x_1, x_2, x_3, ... x_m уравненія (1); если въ это уравненіе вмѣсто неизвѣстной поставимъ рядъ чиселъ 0, Δ, 2Δ, 3Δ, ... $\mu\Delta$, ... тогда между каждыми двумя числами, которыя даютъ результаты $[\mu\Delta]$, $[(\mu+1)\Delta]$ съ противными знаками, необходимо находится одинъ дѣйствительный корень уравненія (1). — Это есть необходимое слѣдствіе предыдущихъ теоремъ.

127. Изъ этаго ясно, что отысканіе границъ дѣйствительныхъ корней алгебраическихъ уравненій сводится на отысканіе величины Δ. Для рѣшенія этой задачи Лагранжъ даетъ слѣдующій способъ. Назовемъ квадратъ разности корней уравненія (1) буквою V, т. е. полагаемъ

$$V = (x_1 - x_2)^2;$$

перемѣщая x_1 и x_2 со всѣми корнями уравненія (1), для V получимъ $\frac{m(m-1)}{2} = n$ значеній которыя мы назовемъ V_1, V_2, V_3,... V_n.

Очевидно, если найдемъ возможность выразить коеффиціенты P_1, P_2, P_3, ... P_n уравненія

$$V^n + P_1 V^{n-1} + P_2 V^{n-2} + ... + P_{n-1} V + P_n = 0, \qquad (2)$$

котораго корни суть различныя значенія V, помощію коеффиціентовъ даннаго уравненія, то задача будетъ рѣшена, ибо назвавъ наименьшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (2) буквою l, получимъ $\Delta = \sqrt{l}$. Чтобъ получить этотъ наименьшій предѣлъ, полагаемъ въ уравненіи (2) $V = \frac{1}{y}$ получимъ:

$$y^n + \frac{P_{n-1}}{P_n} y^{n-1} + ... + \frac{1}{P_n} = 0,$$

ищемъ наибольшій предѣлъ положительныхъ корней этаго уравненія; пусть онъ будетъ t; тогда $l = \frac{1}{t}$ и $\Delta = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Назовемъ

$$s_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + x_3^\mu .... + x_m^\mu ,$$

$$S_\mu = V_1^\mu + V_2^\mu + V_3^\mu + ... + V_n^\mu .$$

Сумма s_μ, для всякаго цѣлаго числа μ, можетъ быть выражена, при помощи формулъ Ньютона (*), въ раціональной функціи коеффиціентовъ p_1, p_2, p_3, ... p_m, и на оборотъ, по тѣмъ же формуламъ, коеффиціенты P_1, P_2, P_3, ... P_n всегда могутъ быть выражены въ раціональной функціи суммъ S_1, S_2, S_3, ... S_n, ... а потому задача сводится на вычисленіе суммъ S въ функціи суммъ s.

(*) Формулы Ньютона пишутся такимъ образомъ:

$p_1 + s_1 = 0$, $s_2 + s_1 p_1 + 2p_2 = 0$, $s_3 + s_2 p_1 + s_1 p_2 + 3p_3 = 0$, ...

$s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + p_2 s_{m-3} + p_3 s_{m-4} .... + (m-1) p_{m-1} = 0$,

и вообще

$s_{m+n} + p_1 s_{m+n-1} + p_2 s_{m+n-2} + ... + p_{m-1} s_{n-1} + p_m s_n = 0$,

гдѣ вмѣсто n можемъ ставить всѣ цѣлыя числа отъ 0 до $\pm\infty$, замѣчая только, что $s_0 = m$.

128. Называемъ

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{2r} + (x - x_2)^{2r} + \ldots + (x - x_m)^{2r} \qquad (3).$$

Если въ эту функцію поставимъ вмѣсто x, по порядку всѣ корни $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, и полученныя ея значенія сложимъ, то найдемъ

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + (x_3) + \ldots + \varphi(x_m) = 2\,S_n.$$

Съ другой стороны, развертывая степени разностей въ функціи $\varphi(x)$, получимъ

$$\varphi(x) = x^{2r} - 2rx^{2r-1}x_1 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}x^{2r-2}x_1 - \ldots + x_1^{2r}$$

$$+ x^{2r} - 2rx^{2r-1}x_2 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}x^{2r-2}x_2 - \ldots + x_2^{2r}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{2r} - 2rx^{2r-1}x_m + \frac{2r(2r-1)}{1.2}x^{2r-2}x_m^2 - \ldots + x_m^{2r}$$

$$= mx^{2r} - 2r\,x^{2r-1}\,s_1 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}x^{2r-2}\,s_2 - \ldots + s_{2r}.$$

Поставляя теперь сюда вмѣсто x по порядку всѣ корни и складывая результаты, получимъ

$$2S_r = ms_{2r} - 2rs_{2r-1}\,s_1 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}s_{2r-2}\,s_2 - \ldots + ms_{2r},$$

откуда

$$S_r = ms_{2r} - 2rs_{2r-1}\,s_1 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}s_{2r-2}s_2 - \ldots \pm \frac{1}{2}\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\,3\ldots r}s_r\,s_r.$$

Давая въ этомъ уравненіи указателю r различныя значенія отъ 1 до n, получимъ суммы S_1, S_2, $S_3 \ldots S_n$ а за тѣмъ вычисленіе коэффиціентовъ P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ окончимъ, какъ уже мы сказали.

199. Надобно сознаться, что этотъ способъ, весьма простой въ теоретическомъ отношеніи, требуетъ чрезвычайно многосложныхъ численныхъ выкладокъ въ примѣненіи, какъ скоро степень даннаго уравненія значительно велика. Лагранжъ, сознавая этотъ недостатокъ, желалъ избѣгнуть уравненія (2) для вычисленія вели-

чины Δ такимъ образомъ: корни даннаго уравненія (1), какъ и прежде, называемъ x_1, x_2, ... x_m, тогда

$$x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + p_2 x_1^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x_1 + p_m = 0, \qquad [x_1]$$

$$x_2^m + p_1 x_2^{m-1} + p_2 x_2^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x_2 + p_m = 0, \qquad [x_2].$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

но если $x_2 - x_1 = i$, то очевидно

$$P + Qi + Ri^2 + Si^3 + \cdots + i^m = 0,$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} P &= x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + p_2 x_1^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x_1 + p_m = 0, \\ Q &= m x_1^{m-1} + p_1 (m-1) x_1^{m-2} + \cdots + p_{m-1}, \\ R &= \frac{m(m-1)}{1.2} x_1^{m-2} + p_1 \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x_1^{m-3} + \cdots \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

и слѣдовательно, по раздѣленіи на i, предыдущее уравненіе принимаетъ видъ

$$Q + Ri + Si^2 + \cdots + i^{m-1} = 0 \qquad (5).$$

Различныя значенія i въ этомъ уравненіи представляютъ разности между корнемъ x_1 и всѣми прочими корнями уравненія (1). А потому, если бы изъ этаго уравненія и изъ уравненія $[x_1]$ исключили x_1, то могли бы придти къ уравненію въ квадратахъ разностей (2); но желая избѣгнуть этаго изключенія Лагранжъ поступаетъ такимъ образомъ. Въ послѣднемъ уравненіи полагаемъ $i = \frac{1}{z}$, тогда получимъ

$$z^{m-1} + \frac{R}{Q} z^{m-2} + \frac{S}{Q} z^{m-1} + \cdots + \frac{1}{Q} = 0 \qquad (6).$$

Извѣстно, что самый большій изъ отрицательныхъ коеффиціентовъ алгебраическаго уравненія сложенный съ единицею болѣе (по численному значенію) самаго большаго изъ его корней, а потому, называя этотъ коеффиціентъ въ уравненіи (6) L, мы най-

демъ, что $\frac{1}{L+1}$ будетъ меньше всѣхъ значеній i въ уравненіи (5). Но подобныя уравненія мы получимъ для разности каждаго корня x_1, x_2, x_3, ... x_m со всѣми прочими, коеффиціенты этихъ уравненій будутъ отличаться одни отъ другихъ только величинами x_1, x_2, x_3 ...., какъ это видно изъ уравненій (m). А потому для опредѣленія Δ можемъ искать наибольшій изъ отрицательныхъ коеффиціентовъ уравненія (6), если въ нихъ, вмѣсто x, поставимъ всѣ корни даннаго уравненія.

130. Чтобы имѣть дѣло съ коеффиціентами, которые не содержатъ x въ знаменателѣ, Лагранжъ поступаетъ такимъ образомъ. Помножимъ функцію

$$Q = mx^{m-1} + p_1(m-1)x^{m-2} + p_2(m-2)x^{m-3} + ... + p_{m-1}$$

на многочленъ

$$\xi = x^{m-1} + q_1x^{m-2} + q_2x^{m-3} + ... + q_{m-1}$$

съ неопредѣленными коеффиціентами q_1, q_2, q_3, ... q_{m-1}; въ произведеніи исключаемъ всѣ степени x выше m–1–й при помощи (1) уравненія, тогда произведеніе $Q\xi$ будетъ m–1–й степени; наконецъ полагаемъ въ этомъ произведеніи коеффиціенты всѣхъ степеней x, начиная съ первой, равными нулю и изъ полученныхъ m–1 линейныхъ уравненій опредѣляемъ коеффиціенты q_1, q_2, q_3 .... q_{m-1}. Тогда, называя члены произведенія $Q\xi$ независящіе отъ x буквою k, получимъ $Q\xi = k$, откуда $Q = \frac{k}{\xi}$. Вслѣдствіе чего уравненіе (6) приметъ видъ

$$x^{m-1} + \frac{R\xi}{k}x^{m-2} + \frac{S\xi}{k}x^{m-3} + ... + \frac{\xi}{k} = 0.$$

Коеффиціенты этаго уравненія не содержатъ x въ знаменателѣ, и для опредѣленія Δ этимъ уравненіемъ Лагранжъ пользуется такимъ образомъ: задача состоитъ въ томъ чтобы найдти наиболь-

шія изъ отрицательныхъ значеній (взятыхъ положительно) коэффиціентовъ $\frac{R\xi}{k}$, $\frac{S\xi}{k}$, ... когда въ нихъ вмѣсто x будутъ поставлены всѣ корни даннаго уравненія. Означимъ черезъ a наименьшій, b наибольшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія; a' наименьшій, b' наибольшій предѣлъ отрицательныхъ его корней, взятыхъ положительно. Поставимъ во всѣ положительныя члены коэффиціентовъ $\frac{R\xi}{k}$, $\frac{S\xi}{k}$ ..... вмѣсто x величину a, а во всѣ отрицательные b и назовемъ самое большее изъ отрицательныхъ значеній этихъ коэффиціентовъ (по численной величинѣ) $-l$; потомъ во всѣхъ коэффиціентахъ $\frac{R\xi}{k}$, $\frac{S\xi}{k}$, ... вмѣсто x вставимъ $-x$, и за тѣмъ во всѣ положительные ихъ члены вставимъ a' а во всѣ отрицательные b'; пусть самое большее изъ отрицательныхъ значеній этихъ коэффиціентовъ (по численной величинѣ) будетъ $-l'$. Беремъ большую изъ величинъ l и l'; пусть она будетъ l. Тогда очевидно, что самый большій изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ уравненія (6), при вставкѣ въ нихъ вмѣсто x всѣхъ корней даннаго уравненія, не можетъ быть больше l, слѣдовательно мы можемъ взять $\Delta = \frac{1}{l+1}$.

131. Когда Δ найдено, отдѣленіе дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія, какъ мы уже видѣли, очень просто; но въ примѣненіи, для облегченія счета, можно пользоваться еще слѣдующими замѣчаніями.

Для даннаго уравненія можно находить границы сначала только положительныхъ корней, ибо поставивъ въ немъ $-x$ вмѣсто x, положительные корни измѣнимъ въ отрицательные и наоборотъ, и слѣдовательно предѣлы отрицательныхъ корней найдутся также какъ и положительныхъ.

Назовемъ, какъ и прежде, t наибольшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (α); чтобы имѣть дѣло съ числами

только цѣлыми, можно въ данное уравненіе вмѣсто x поставить $\frac{x}{k}$, гдѣ $k=\sqrt{l}$, если $\sqrt{l}$ число цѣлое, или равно числу цѣлому непосредственно большему $\sqrt{l}$, если $\sqrt{l}$ число дробное или ирраціональное. Въ самомъ дѣлѣ, для преобразованнаго такимъ образомъ уравненія $\Delta=1$, и слѣдовательно для отдѣленія его корней должно будетъ вмѣсто перемѣнной ставить рядъ чиселъ 1, 2, 3, ...

132. Вся трудность рѣшенія задачи объ отдѣленіи дѣйствительныхъ корней уравненія состоитъ, слѣдовательно, въ вычисленіи коеффиціентовъ уравненія (2) или въ опредѣленіи величины Δ по второму способу, предложенному Лагранжемъ. Относительно уравненія (2) мы уже замѣтили, что при высокой степени уравненія даннаго, вычисленіе коеффиціентовъ (2) уравненія чрезвычайно многосложно, такъ что врядъ ли можно рѣшиться употребить этотъ способъ при уравненіяхъ выше четвертой степени. Что касается до втораго способа, то хотя въ примѣненіяхъ онъ и упрощаетъ задачу, однако же при высокой степени уравненія и этотъ способъ требуетъ многосложныхъ вычисленій.

133. Уравненіе (2), какъ скоро оно вычислено, открываетъ намъ всѣ свойства даннаго уравненія. Такимъ образомъ, если это послѣднее имѣетъ равные корни, то уравненію (2) будетъ принадлежать столько нулныхъ значеній V, сколько въ данномъ уравненіи можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ равныхъ корней по два; а слѣдовательно въ уравненіи (2) не будетъ доставать столькихъ же послѣднихъ членовъ. Въ этомъ случаѣ равные корни могутъ быть отдѣлены, отыскивая общаго наибольшаго дѣлителя даннаго уравненія и его производнаго.

Легко видѣть также, что если всѣ корни уравненія (2) будутъ дѣйствительные и положительные, то уравненіе данное не имѣетъ воображаемыхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ предположимъ, что уравненіе (1) имѣетъ сопряженные воображаемые корни $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; тогда уравненію (2) необходимо будетъ принадлежать отрицательный корень $-4\beta^2$. Припоминая теперь законъ Декарта о зависимости между числомъ положительныхъ и отрицательныхъ корней и числомъ перемѣнъ или послѣдовательностей знаковъ уравненія, легко видѣть, что если въ уравненіи (2) не всѣ члены будутъ попеременно положительны и отрицательны, то это ясный признакъ, что данное уравненіе имѣетъ воображаемые корни. Обратно, если въ уравненіи (2) всѣ члены по перемѣнно положительны и отрицательны, то оно не имѣетъ отрицательныхъ корней, а предполагая, что всѣ коеффиціенты даннаго уравненія числа дѣйствительныя, мы можемъ заключить, что это послѣднее не имѣетъ воображаемыхъ корней.

134. Уравненіе (2) даетъ также возможность вычислить воображаемые корни даннаго уравненія, если оно такіе имѣетъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ будетъ пара воображаемыхъ корней даннаго уравненія; въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, уравненіе (2) необходимо допускаетъ отрицательный корень $-4\beta^2$, а потому поставивъ въ этомъ уравненіи $-V$ вмѣсто V и вычисляя положительный его корень V_1, мы получимъ $\beta=\frac{\sqrt{V_1}}{2}$. Чтобы найдти отвѣчающее значеніе α, поставимъ $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ вмѣсто x въ уравненіе (1); получимъ:

$$\alpha^m+v_1\alpha^{m-1}+v_2\alpha^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+v_m=0,$$

$$\alpha^{m-1}+q_1\alpha^{m-2}+q_2\alpha^{m-3}+\ldots\ldots+q_{m-1}=0,$$

гдѣ v_1, v_2, v_3, ... q_1, q_2, q_3, ... означаютъ функціи β и коеффиціентовъ даннаго уравненія. Эти уравненія, какъ совмѣстныя, необходимо имѣютъ общаго дѣлителя, который будетъ первой степени, если каждому значенію β отвѣчаетъ одно значеніе α; если

уравненіе (2) имѣетъ нѣсколько отрицательныхъ корней равныхъ между собою, тогда общій дѣлитель предъидущихъ уравненій будетъ выше первой степени и уравнивая его нулю, мы найдемъ нѣсколько значеній α равныхъ или неравныхъ между собою, которыя будутъ отвѣчать равнымъ значеніямъ β.

135. Когда границы между которыми лежатъ дѣйствительные корни даннаго алгебраическаго уравненія найдены, то для вычисленія этихъ корней Лагранжъ предлагаетъ способъ, который и въ настоящее время, при болѣе удобныхъ средствахъ для опредѣленія границъ корней, можетъ быть употребленъ съ большою пользою. Способъ этотъ, извѣстный подъ именемъ *способа непрерывныхъ дробей* состоитъ въ слѣдующемъ:

Назовемъ p цѣлое число ближайшее къ искомому корню x_1, но меньшее его (*); тогда $x_1 = p + \frac{1}{y}$, гдѣ y необходимо число положительное, большее единицы. Вставляя вмѣсто x_1 его значеніе въ уравненіе (1) и располагая результатъ по степенямъ y, получимъ:

$$Ry^m + R_1y^{m-1} + R_2y^{m-2} + \cdots + R_{m-1}y + R_m = 0, \qquad (7)$$

гдѣ

$$R = p^m + p_1p^{m-1} + p_2p^{m-2} + \cdots p_{m-1}p + p_m,$$

$$R_1 = mp^{m-1} + (m-1)p_1p^{m-2} + (m-2)p_2p^{m-3} + \cdots p_{m-1},$$

$$R_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}p^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}p_1p^{m-3} + \cdots p_{m-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_m = 1.$$

Если p служитъ ближайшею границею одному только корню x_1, то уравненію (7) необходимо принадлежитъ одинъ только корень боль-

(*) Это предположеніе впрочемъ не необходимо: p можетъ быть больше x_1; но въ такомъ случаѣ y уже не будетъ число положительное. Дальнѣйшій ходъ вычисленія остается впрочемъ одинаковъ.

шій единицы, ибо допустивъ противное и назвавъ эти корни y_1 и y_2 мы получили бы для x_1 два значенія $p+\frac{1}{y_1}$ и $p+\frac{1}{y_2}$, которымъ ближайшею нижнею границею служитъ одно и тоже число p, что противно предположенію. Изъ этаго слѣдуетъ, что для уравненія (7) число Δ можетъ быть принято равнымъ единицѣ, а потому ближайшее цѣлое число къ корню y этаго уравненія можетъ быть легко найдено. Пусть это число будетъ q, полагая притомъ $q<y$; тогда по предыдущему можно полагать $y=q+\frac{1}{z}$, гдѣ $z>1$ Вставляя это значеніе y въ уравненіе (7), для опредѣленія z получимъ подобное же уравненіе изъ котораго найдемъ цѣлое число r ближайшее къ z, но меньшее его. Продолжая такимъ образомъ далѣе, для вычисленія корня x_1 получимъ непрерывную дробь:

$$x_1 = p + \cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cdots\cdots}}}$$

136. Вычисляя приближенныя значенія этой непрерывной дроби, мы получимъ рядъ дробей

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{a''}{b''},\ \frac{a'''}{b'''},\ \cdots\cdots \qquad (8)$$

которыя поперемѣнно будутъ меньше и больше искомаго значенія x_1; а слѣдовательно, если за истинное значеніе примемъ одну изъ дробей, напримѣръ $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$, то погрѣшность будетъ меньше разности $\frac{a^{(n+1)}}{b^{(n+1)}}-\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}=\frac{a^{(n+1)}b^{(n)}-a^{(n)}b^{(n+1)}}{b^{(n)}b^{(n+1)}}$. Но, по свойству непрерывныхъ дробей, $a^{(n+1)}b^{(n)}-a^{(n)}b^{(n+1)}=\pm 1$, $b^{(n+1)}>b^{(n)}$, а слѣдовательно, взявъ за истинное значеніе x_1 дробь $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$, мы сдѣлаемъ погрѣшность которая меньше $\frac{1}{(b^{(n)})^2}$. Такимъ образомъ способъ

этотъ даетъ возможность опредѣлить предѣлъ погрѣшности при вычисленіи корня, а это, во всѣхъ приближенныхъ вычисленіяхъ, составляетъ одно изъ главныхъ условій хорошаго способа.

137. Способъ непрерывныхъ дробей даетъ также возможность получить значеніе корня x_1 подъ видомъ строки. Въ самомъ дѣлѣ замѣчая, что въ ряду (8), $a = p$, $b = 1$, получимъ

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}, \quad \frac{a''}{b''} - \frac{a'}{b'} = -\frac{1}{b'b''}, \quad \frac{a'''}{b'''} - \frac{a''}{b''} = +\frac{1}{b'''b''}, \ldots\ldots$$

и

$$\frac{a'}{b'} = p + \frac{1}{bb'}, \quad \frac{a''}{b''} = p + \frac{1}{bb'} - \frac{1}{b'b''}, \quad \frac{a'''}{b'''} = p + \frac{1}{bb'} - \frac{1}{b'b''} + \frac{1}{b'b'''}, \ldots$$

А слѣдовательно, останавливаясь на членѣ $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$ ряда (8), полу-

$$x_1 = p + \frac{1}{bb'} - \frac{1}{b'b''} + \frac{1}{b''b'''} - \frac{1}{b'''b^{IV}} + \ldots\ldots \pm \frac{1}{b^{(n-1)}b^{(n)}},$$

при чемъ ошибка будетъ меньше $\frac{1}{(b^{(n)})^2}$.

138. Мы предполагали, что p служитъ ближайшею нижнею границею (въ цѣлыхъ числахъ) одному только корню x_1. Если случится, что два корня x_1 и x_2 имѣютъ одну и туже нижнюю границу p, тогда въ уравненіи (7) y будетъ имѣть два значенія большихъ единицы. Называя въ этомъ случаѣ q_1 и q_2 цѣлыя числа, которыя служатъ нижними границами значеніямъ y, для вычисленія x_1 и x_2 мы получимъ дроби.

$$x_1 = p + \frac{1}{q_1 + \ldots\ldots}, \qquad x_2 = p + \frac{1}{q_2 + \ldots\ldots}$$

Если и $q_1 = q_2$, тогда z будетъ имѣть два значенія большія единицы, называя цѣлыя числа ближайшія къ этимъ значеніямъ r_1 и r_2, въ этомъ случаѣ получимъ

$$x_1 = p + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{r_1 + \ldots\ldots}}, \qquad x_2 = p + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ldots\ldots}}$$

и т. д.

Изъ этаго мы видимъ, что если разности между корнями даннаго уравненія будутъ меньше единицы, то вычисленіе этихъ корней по способу непрерывныхъ дробей становится тѣмъ затруднительнѣе, чѣмъ корни ближе другъ къ другу, ибо тогда, какъ для уравненія (7), такъ и для слѣдующихъ за нимъ (опредѣляющихъ z, ...), Δ не можетъ быть принято за единицу, а должно быть вычислено по тому же способу, по которому оно вычисляется для даннаго уравненія, — а это, какъ мы уже сказали, при высокой степени уравненія представляетъ огромный трудъ.

Примѣнимъ способъ Лагранжа къ рѣшенію уравненія третьей степени,

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0,$$

уравненіе въ квадратахъ разностей будетъ также третьей степени; напишемъ его такимъ образомъ

$$V^3 + P_1 V^2 + P_2 V + P_3 = 0.$$

Чтобы вычислить коеффиціенты P_1, P_2, P_3, вычисляемъ сначала суммы s по формуламъ Ньютона:

$$\begin{aligned}
&s_1 + p_1 = 0,\\
&s_2 + s_1 p_1 + 2p_2 = 0,\\
&s_3 + s_2 p_1 + s_1 p_2 + 3p_3 = 0,\\
&s_4 + s_3 p_1 + s_2 p_2 + s_1 p_3 = 0,\\
&s_5 + s_4 p_1 + s_3 p_2 + s_2 p_3 = 0,\\
&s_6 + s_5 p_1 + s_4 p_2 + s_3 p_3 = 0.
\end{aligned}$$

Въ нашемъ случаѣ $p_1 = -6$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$; а потому

$$s_1 = 6,\ s_2 = 30,\ s_3 = 159,\ s_4 = 858,\ s_5 = 4641,\ s_6 = 25113.$$

Теперь для вычисленія суммъ S беремъ формулу

$$S_r = ms_{2r} - 2rs_{2r-1}s_1 + \frac{2r(2r-1)}{1.2}s_{2r-2}s_2 - \ldots\ldots \pm \frac{1}{2}\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{1.2.3\ldots.r}s_r s_r,$$

изъ которой, полагая въ ней по порядку $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ и поставивъ 3 вмѣсто m, получимъ

$$S_1 = 3s_2 - s_1^2,$$
$$S_2 = 3s_4 - 4s_3 s_1 + 3s_2^2$$
$$S_3 = 3s_6 - 6s_5 s_1 + 15s_4 s_2 - 10s_3^2.$$

А поставивъ здѣсь вмѣсто суммъ s найденныя ихъ значенія, получимъ

$$S_1 = 54, \quad S_2 = 1458, \quad S_3 = 41553.$$

Наконецъ беремъ снова формулы Ньютона

$$S_1 + P_1 = 0,$$
$$S_2 + S_1 P_1 + 2P_2 = 0,$$
$$S_3 + S_2 P_1 + S_1 P_2 + 3P_3 = 0,$$

изъ которыхъ, при помощи значеній S, находимъ

$$P_1 = -54, \quad P_2 = +729, \quad P_3 = -729.$$

И такъ уравненіе въ квадратахъ разностей будетъ:

$$V^3 - 54V^2 + 729V - 729 = 0.$$

Отсюда, во первыхъ, заключаемъ, что всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные, ибо коеффиціенты P_1, P_2, P_3, по перемѣнно отрицательны и положительны. За тѣмъ для опредѣленія Δ полагаемъ въ этомъ уравненіи $V = \frac{1}{y}$; тогда получимъ

$$y^3 - y^2 + \frac{54}{729} y - \frac{1}{729} = 0;$$

самый большій отрицательный коеффиціентъ этаго уравненія сложенный съ единицею будетъ больше самаго большаго изъ его корней; слѣдовательно 2 больше самаго большаго изъ значеній y, или $\frac{1}{2}$ меньше самаго меньшаго изъ значеній V. И такъ $\Delta = \sqrt{\frac{1}{2}}$;

139. Найдемъ теперь Δ по другому способу. Въ настоящемъ случаѣ уравненіе (6) будетъ

$$z^3 + \frac{3x-6}{3x^2-12x+3} z + \frac{1}{3x^2-12x+3} = 0 \qquad (6)$$

Чтобы уничтожить въ знаменателѣ x, помножаемъ многочленъ $Q = 3x^2 - 12x + 3$ на множителя $\xi = x^2 + qx + q_1$, и исключаемъ въ произведеніи всѣ степени x выше второй при помощи даннаго уравненія. Тогда получимъ

$$Q\xi = (30 + 6q + 3q_1) x^2 - (21 + 6q + 12q_1) x + 3q_1 - 3q - 6;$$

выбираемъ коеффиціенты q и q_1 такимъ образомъ, чтобы было

$$30 + 6q + 3q_1 = 0,$$
$$21 + 6q + 12q_1 = 0,$$

откуда $q = -\frac{11}{2}$, $q_1 = 1$. А слѣдовательно

$$\xi = x^2 - \frac{11}{2} x + 1, \quad Q\xi = \frac{27}{2} = k.$$

Вставляя отсюда значеніе Q въ уравненіе (6), получимъ

$$z^3 + \frac{-9x^2+51x-18}{27} z + \frac{2x^2 - 11x + 2}{27} = 0$$

Верхняя граница положительныхъ корней даннаго уравненія будетъ $a = 6$, нижняя $b = \frac{1}{2}$, верхняя граница отрицательныхъ корней $a' = 1$, нижняя $b' = \frac{1}{5}$; а потому вставляя въ положительные члены коеффиціентовъ

$$\frac{-9x^2+51x-18}{27}, \quad \frac{2x^2 - 11x + 2}{27},$$

вмѣсто x, $\frac{1}{2}$, а въ отрицательные вмѣсто x, 6, получимъ $-\frac{621}{54}$

$-\frac{127}{54}$. Потомъ въ тѣхъ же коеффиціентахъ ставимъ $-x$ вмѣсто x, получимъ

$$\frac{-9x^3-51x-18}{27}, \quad \frac{2x^3+11x+2}{27}$$

и поставимъ въ положительные члены $\frac{1}{5}$ вмѣсто x, а въ отрицательные 1 вмѣсто x; тогда получимъ одинъ отрицательный коеффиціентъ

$$-\frac{88}{27}.$$

А слѣдовательно, по численному значенію, большій изъ отрицательныхъ результатовъ этихъ подстановокъ будетъ $-\frac{621}{54}$. И такъ

$$l=\frac{621}{54} \quad \text{и} \quad \Delta=\frac{1}{l+1}=\frac{54}{675},$$

откуда ясно, что этотъ способъ даетъ для Δ значеніе еще меньшее нежели предыдущій. Но здѣсь преимущество послѣдняго способа не такъ очевидно, какъ въ тѣхъ случаяхъ, когда степень даннаго уравненія выше третьей.

Чтобъ имѣть дѣло съ числами болѣе круглыми, мы вмѣсто Δ возмемъ $\frac{1}{2}$. Вставляя въ данное уравненіе рядъ чиселъ

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{6}{2} \cdots\cdots \frac{12}{2},$$

потомъ

$$0, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{2},$$

найдемъ, что оно имѣетъ два положительныхъ корня, изъ которыхъ одинъ лежитъ между 0 и 1 другой между 5 и 6 и одинъ отрицательный — между 0 и -1. Вычислимъ одинъ изъ этихъ

корней, напримѣръ, первый положительный. По способу непрерывныхъ дробей, въ уравненіи

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0.$$

должно вмѣсто x поставить $p + \frac{1}{y}$, гдѣ p ближайшее цѣлое число къ искомому корню, но меньшее его; въ настоящемъ случаѣ $p = 0$, и уравненіе для вычисленія y будетъ:

$$y^3 + 3y^2 - 6y + 1 = 0.$$

Вставляемъ въ это уравненіе рядъ чиселъ 1, 2, ...; мы находимъ, что оно имѣетъ одинъ корень большій 1, который лежитъ между 1 и 2. И такъ полагаемъ $y = 1 + \frac{1}{z}$. Для вычисленія z мы будемъ имѣть уравненіе

$$z^3 - 3z^2 - 6z - 1 = 0.$$

Легко видѣть, что корень этаго уравненія большій единицы будетъ лежать между 4 и 5; а потому полагаемъ $z = 4 + \frac{1}{u}$ и для вычисленія u получаемъ уравненіе

$$9u^3 - 12u^2 - 9u - 1 = 0,$$

изъ котораго найдемъ, что $u > 1$ и < 2

Такимъ образомъ искомый корень даннаго уравненія выразится непрерывной дробью

$$0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots\cdots}}}}$$

За способомъ Лагранжа слѣдуютъ уже тѣ способы которые мы изложили.

ПРИМѢНЕНІЕ СПОСОБА ФУРЬЕ КЪ РѢШЕНІЮ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

140. Подъ именемъ трансцендентной функціи мы разумѣемъ такую, которая не можетъ быть составлена изъ перемѣнной величины посредствомъ конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій. Такова, наприм., функція которая дается подъ видомъ безконечной строки или безконечнаго ряда множителей, таковы функціи $\mathrm{Sin}\, x$, $\mathrm{Cos}\, x$, e^x, $\lg x$ и пр. Опредѣленною трансцендентною функціей назовемъ такую, которой значеніе можетъ быть вычислено, по приближенію, съ какою угодно точностью, какъ скоро дано значеніе независимой перемѣнной. Мы будемъ говорить только объ опредѣленныхъ трансцендентныхъ функціяхъ, ибо функціи, которыхъ значеніе не можетъ быть вычислено по данному значенію перемѣнной величины, не могутъ имѣть примѣненія въ анализѣ.

Опредѣленнымъ трансцедентнымъ уравненіемъ назовемъ такое, въ которомъ изъ неизвѣстной величины составлена опредѣленная трансцендентная функція; корнемъ этаго уравненія будетъ то значеніе неизвѣстной величины, которое приводитъ трансцендентную функцію тождественно къ нулю. Отысканіе этихъ корней и составляетъ задачу о рѣшеніи опредѣленныхъ трансцендентныхъ уравненій, задачу весьма интересную, какъ по своимъ трудностямъ, такъ и по многочисленнымъ примѣненіямъ въ анализѣ.

141. Мы хотимъ показать, что каково бы ни было опредѣленное трансцендентное уравненіе, всегда можно найдти границы его дѣйствительныхъ корней и вычислить эти корни, по приближенію, съ какою угодно точностью, по способу который Фурье далъ для алгебраическихъ уравненій.

Припомнимъ сущность способа Фурье. Чтобы отыскать границы между которыми лежатъ дѣйствительные корни какой угодно

функціи $\psi(x)$, по способу Фурье необходимо, взявъ рядъ производныхъ этой функціи до производной имѣющей постоянное значеніе

$$\psi(x),\quad \psi'(x),\quad \psi''(x),\quad \psi'''(x),\ldots\ldots\ \psi^{(m-1)}(x),\quad \psi^{(m)}(x) \qquad (1)$$

и вставивъ въ этотъ рядъ два числа a и b, вмѣсто x, опредѣлить разность между числомъ перемѣнъ знаковъ при результатахъ вставки чиселъ a и b; разность эта покажетъ сколько данная функція можетъ имѣть корней между границами a и b. Доказательство этой теоремы основано на непрерывности функціи $\psi(x)$, на ея способности разлагаться въ строку Тейлора. Условіе требуемое этою теоремой сразу ограничиваетъ выборъ функціи $\psi(x)$ тѣмъ во первыхъ, что послѣдовательное дифференцированіе ея должно привести насъ къ величинѣ постоянной и такимъ образомъ изключаетъ повидимому всѣ трансцендентныя функціи, какъ такія, которыя имѣютъ безконечное число производныхъ. Но для примѣненія способа Фурье нѣтъ никакой необходимости разсматривать цѣлый рядъ производныхъ функцій (1) до той которая имѣетъ постоянное значеніе. Въ самомъ дѣлѣ поставимъ въ рядъ (1) вмѣсто x два числа a и b; пусть результаты этихъ вставокъ будутъ:

$$(a)\qquad \psi(a),\quad \psi'(a),\quad \psi''(a),\quad \psi'''(a),\ldots\ldots\ \psi^{(n)}(a),\ldots\ldots\ \psi^{(m)}(a),$$

$$(b)\qquad \psi(b),\quad \psi'(b),\quad \psi''(b),\quad \psi'''(b),\ldots\ldots\ \psi^{(n)}(b),\ldots\ldots\ \psi^{(m)}(b).$$

Составимъ рядъ указателей, отвѣчающихъ этимъ функціямъ для промежутка $b-a$; пусть этотъ рядъ будетъ

$$\mu,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\ldots\ldots\ \mu_n,\ldots\ldots\ \mu_m \qquad (2).$$

Каждый указатель μ показываетъ сколько соотвѣтствующая функція можетъ имѣть корней въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Указатели эти составляются такимъ образомъ: беремъ въ рядахъ (a) и (b) сначала по двѣ, потомъ по три, по четыре и т. д. функціи съ правой стороны и изъ числа перемѣнъ знаковъ верхняго

ряда вычитаемъ число перемѣнъ нижняго ряда, полученная разность будетъ указателемъ той функціи на которой остановились. Такъ для опредѣленія указателя μ_n отвѣчающаго функціи $\psi^{(n)}(x)$, беремъ ряды

$$\psi^{(n)}(a),\quad \psi^{(n+1)}(a),\ \ldots\ldots\ \psi^{(m)}(a)$$
$$\psi^{(n)}(b),\quad \psi^{(n+1)}(b)\ \ldots\ldots\ \psi^{(m)}(b)$$

и сосчитываемъ число перемѣнъ верхняго ряда, k, и число перемѣнъ нижняго ряда, k'; тогда $k - k' = \mu_n$. Изъ этаго очевидно, что если одинъ изъ указателей ряда (2), напримѣръ $\mu_n = 0$, то на значеніе крайняго указателя μ, отвѣчающаго начальной функціи, цѣлый рядъ функцій

$$\psi^{(n+1)}(x),\quad \psi^{(n+2)}(x),\ \ldots\ldots\ \psi^{(m)}(x)$$

не будетъ имѣть, въ промежуткѣ отъ a до b, никакого вліянія, и слѣдовательно для опредѣленія числа дѣйствительныхъ корней функціи $\psi(x)$, между границами a и b, мы можемъ разсматривать только рядъ

$$\psi(x),\quad \psi'(x),\quad \psi''(x),\quad \psi'''(x),\ \ldots\ldots\ \psi^{(n)}(x), \qquad (3)$$

ограничивая его тою функціею, которой указатель μ_n равенъ нулю, или иначе — которая между границами a и b не имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

142. На основаніи этаго замѣчанія мы можемъ весьма просто примѣнить способъ Фурье къ рѣшенію трансцендентныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ предположимъ, что функція $\psi(x)$ опредѣленная трансцендентная и между границами a и b, какъ она сама, такъ и всѣ ея производныя до производной порядка n не дѣлаются безконечными и остаются непрерывными, такъ что мы можемъ примѣнить къ нимъ разложеніе въ строку по формулѣ

$$\psi(x + h) = \psi(x) + h\psi'(x) + h^2_c\psi''(x) + \ldots\ldots + h^n_c\psi^n(x + \theta h);$$

при томъ предположимъ, что производная порядка n ни для какихъ дѣйствительныхъ значеній перемѣнной величины между границами

a и b не измѣняетъ своего знака. Тогда очевидно, что къ ряду (3) мы можемъ примѣнить способъ Фурье безъ всякаго измѣненія. Такъ мы можемъ доказать, что если для какого нибудь числа α уничтожается одна начальная функція, то при переходѣ перемѣнной чрезъ значеніе α рядъ знаковъ отвѣчающихъ функціямъ (3) всегда теряетъ одну перемѣну; что при уничтоженіи среднихъ функцій число теряющихся перемѣнъ будетъ четное; составивъ рядъ указателей отвѣчающихъ функціямъ (3), мы можемъ сказать сколько каждая изъ нихъ можетъ имѣть въ разсматриваемомъ промежуткѣ дѣйствительныхъ корней; а наконецъ, примѣняя способъ подкасательныхъ, можемъ опредѣлить истинное число этихъ корней и найдти для каждаго изъ нихъ извѣстныя границы. Должно только замѣтить, что если указатель начальной функціи $\psi(x)$ равенъ μ, а способъ подкасательныхъ показываетъ, что число дѣйствительныхъ корней этой функціи, въ промежуткѣ отъ a до b, меньше μ, то этаго нельзя считать за признакъ воображаемыхъ корней для функціи $\psi(x)$; ибо недостатокъ дѣйствительныхъ корней въ извѣстномъ промежуткѣ, въ которомъ теряются перемѣны, въ случаѣ алгебраическихъ уравненій считается за признакъ содержанія воображаемыхъ корней потому, что число корней этихъ уравненій конечно, тогда какъ для уравненій трансцендентныхъ это число безконечно велико.

143. Остается рѣшить еще одно затрудненіе—какимъ образомъ для даннаго промежутка, отъ a до b, выбирать изъ безконечнаго ряда

$$\psi(x),\quad \psi'(x),\quad \psi''(x),\quad \psi'''(x) \ldots\ldots \psi^{(n)}(x) \ldots\ldots \qquad (4)$$

функцію $\psi^{(n)}(x)$, удовлетворяющую требуемымъ условіямъ. Но если $\psi(x)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и ея производныя функціи опредѣленныя, то подраздѣляя, если нужно, промежутокъ отъ a до b на другіе, какъ угодно малые, мы всегда можемъ въ безконечномъ ряду (4) выбрать такую функцію $\psi^{(n)}(x)$, которая не будетъ, въ разсматриваемомъ промежуткѣ, мѣнять знакъ, а

всѣ предыдущія функціи не претерпѣваютъ разрыва непрерывности и не дѣлаются безконечными; и слѣдовательно въ этомъ промежуткѣ мы всегда можемъ опредѣлить число дѣйствительныхъ корней функціи $\psi(x)$, ихъ границы, а потомъ и приближенныя значенія съ какою угодно точностью, примѣняя способъ Ньютона.

144. Затрудненіе не можетъ представить и функція e^x, которую проводили какъ примѣръ невозможности примѣненія способа Фурье. Въ самомъ дѣлѣ, если возмемъ функцію e^x со всѣми ея производными, то какъ бы далеко мы не продолжали рядъ этихъ производныхъ, примѣняя способъ Фурье, мы найдемъ, что указатель начальной функціи μ равенъ нулю для всякаго промежутка отъ a до b, если только эти числа остаются конечными, — и дѣйствительно мы знаемъ, что функція e^x не имѣетъ конечныхъ корней, а всѣ ея корни безконечно велики и заключаются въ формулѣ $x = -\infty$. Какъ же отъ способа Фурье требовать опредѣленія безконечныхъ корней, когда онъ для этаго и не назначенъ?

Пояснимъ эту теорію нѣсколькими примѣрами (*).

1-й

$$x.\,lx - 100 = 0.$$

Предполагая логарифмъ гиперболическимъ, получимъ

$$\psi(x) = xlx - 100,$$
$$\psi'(x) = lx + 1$$
$$\psi''(x) = \frac{1}{x}.$$

Такъ какъ здѣсь вторая производная остается положительною для всѣхъ значеній перемѣнной между границами 0 и $+\infty$, то на

(*) Примѣры эти мы заимствуемъ изъ мемуара Штерна (Stern-Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen. Crelle — Journal für die reine und angew. Mathem. b. 22).

ней мы и можемъ остановиться въ безконечномъ ряду производныхъ и примѣнить способъ Фурье къ функціямъ

$$xlx - 100, \quad lx + 1, \quad \frac{1}{x}.$$

Вставляя сюда границы 0 и $+\infty$, получимъ

[0]	−	+	+
	1	0	0
$[+\infty]$	+	+	+

Откуда заключаемъ, что данное уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный положительный корень; сближая границы найдемъ, что этотъ корень лежитъ между 3 и 4; а употребляя способъ Ньютона для приближеннаго его вычисленія, получимъ

$$x = 3{,}5972851;$$

Эйлеръ находитъ

$$x = 3{,}5972852.$$

2-й

$$x - \mathrm{Cos}\, x = 0.$$

Восходя до второй производной и замѣчая, что она остается постоянно положительною между границами 0 и 90° найдемъ, что данное уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между этими границами, который лежитъ между 0,7 и 0,8. Болѣе точное значеніе его найдемъ по способу Ньютона:

$$x = 0{,}73908512;$$

Эйлеръ находитъ

$$x = 0{,}7390847.$$

3-й

$$x - \mathrm{tg}\, x = 0.$$

Это уравненіе можно написать такимъ образомъ:

$$\frac{x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = 0$$

Но корни уравненія $\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = 0$ не будутъ корнями даннаго (*), а потому мы можемъ разсматривать уравненіе

$$x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x = 0.$$

Восходя и здѣсь до второй производной, найдемъ для перваго дѣйствительнаго корня значеніе

$$x = 4{,}49340964,$$

которое по Эйлеру $= 4{,}49340834$, по Пуассону $= 4{,}49331$.
Легко видѣть, что это уравненіе имѣетъ безконечное число положительныхъ корней и что n–й корень лежитъ между границами $n\pi$ и $(n + \frac{1}{2})\pi$.

4–й

$$(4 - 3x^2) \operatorname{Sin} x - 4x \operatorname{Cos} x = 0.$$

Каждому положительному корню этаго уравненія отвѣчаетъ отрицательный равный ему по численному значенію; меньшій корень его равенъ нулю; вычисляя слѣдующій за нимъ по способу Фурье, находимъ:

$$x = 2{,}56343423.$$

Пуассонъ даетъ

$$x = 2{,}56334.$$

Третій корень будетъ

$$x = 6{,}0586701,$$

по Пуассону

$$x = 6{,}05973.$$

n–й корень будетъ лежать между границами $(n - \frac{1}{2})\pi$ и $n\pi$.

(*) Crelle J. f. die R. und angew. Math b. 22 p. 9.

5-й

$$(e^{x} + e^{-x}) \operatorname{Cos} x - 2 = 0.$$

Первый положительный корень этаго уравненія будетъ

$$x = 4{,}73004099.$$

Пуассонъ находитъ

$$x = 4{,}73003.$$

6-й

$$(e^{x} + e^{-x}) \operatorname{Cos} x + 2 = 0.$$

Первый положительный корень

$$x = 1{,}87510402.$$

По Пуассону

$$x = 1{,}8756.$$

7-й

$$1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \ldots\ldots = 0.$$

Восходя до второй производной увидимъ, что она остается постоянно положительною между границами 0 и 3. Вставляя эти числа въ рядъ

$$\psi(x), \quad \psi'(x), \quad \psi''(x),$$

получимъ

[0]	+	−	+
[3]	−	−	+

Отсюда заключаемъ, что между 0 и 3 надодится одинъ дѣйствительный корень даннаго уравненія. Сближая границы найдемъ что онъ лежитъ между 1, 4 и 1, 5; а вычисляя его по приближенію, получимъ

$$x = 1{,}4458.$$

Пуассонъ находитъ

$$x = 1{,}4457.$$

Восходя до седьмой производной, которая постоянно остается отрицательною между 0 и 8, увидимъ, что между границами

7 и 8 вторая производная не имѣетъ корней; а потому останавливаясь на ней и отыскивая корни даннаго уравненія между 7 и 8,

найдемъ $x = 7{,}6178153.$

Пуассонъ находитъ

$$x = 7{,}6243.$$

8-й

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3.2^2} - \frac{x^3}{4(2.3)^2} + \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} - \ldots\ldots = 0$$

$$x = 3{,}6705, \quad x = 12{,}3046142,$$

Пуассонъ находитъ

$$x = 3{,}55, \quad x = 12{,}41.$$

Замѣчаніе на формулу Ньютона.

Пусть x_1 будетъ искомый корень алгебраическаго уравненія

$$f(x) = 0 ; \qquad (1)$$

назовемъ a найденное приближенное значеніе этаго корня. Мы видѣли, что для примѣненія способа Ньютона къ вычисленію болѣе точнаго значенія корня необходимо, чтобы ни первая, ни вторая производная функціи $f(x)$ не уничтожалась для $x = x_1$. Сверхъ того, если $f(a)f''(a) > 0$, то употребляя формулу Ньютона

$$a' = a + \frac{-f(a)}{f'(a)},$$

Мы получимъ $x_1 < a' < a$, или $x_1 > a' > a$, смотря потому будетъ ли первое приближенное значеніе корня a больше, или меньше x_1. Но если $f(a)f''(a) < 0$, то вычисляя новое приближенное значеніе корня по той же формулѣ Ньютона, мы можемъ получить такое значеніе a', которое будетъ больше x_1, если a было меньше x_1, или наоборотъ. Если потомъ, для дальнѣйшаго приближенія будемъ употреблять ту же формулу, то мы будемъ дѣйствительно приближаться къ истинному значенію корня только въ томъ случаѣ, когда между границами a и a' ни первая, ни вторая производная функціи $f(x)$ не мѣняютъ своего знака. Фурье, для приближенія къ искомому корню отъ границы a, не удовлетворяющей условію $f(a)f''(a) > 0$, употребляетъ не формулу Ньютона, а слѣдующую

$$a' = a + \frac{-f(a)}{f'(b)},$$

гдѣ b означаетъ другую границу корня, такую, что въ промежуткѣ отъ a до b не уничтожается ни первая, ни вторая производная функціи $f(x)$.

Но иногда бываетъ удобнѣе и къ границѣ a, не удовлетво-

ряющей условію $f(a)f''(a) > 0$, примѣнять формулу Ньютона, а не формулу Фурье, а потому весьма естественно представляется вопросъ — въ какомъ случаѣ, примѣняя формулу Ньютона къ такой границѣ, мы не выйдемъ изъ промежутка отъ a до b? Слѣдуя указанію Горнера (*) весьма не трудно рѣшить этотъ вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ пусть a и b двѣ границы искомаго корня x_1 уравненія

$$f(x) = 0;$$

пусть $x_1 = a + \alpha = b + \beta$, притомъ граница b удовлетворяетъ условію $f(b)f''(b) > 0$ и между a и b функціи $f(x)$ и $f'(x)$ не измѣняютъ своего знака. Тогда

$$f(a) + \alpha f'(a + \theta\alpha) = 0,$$

$$f(b) + \beta f'(b + \theta'\beta) = 0.$$

Назовемъ h и k тѣ значенія величинъ α и β, которыя даетъ способъ Ньютона; мы получимъ

$$f(a) + hf'(a) = 0,$$

$$f(b) + kf'(b) = 0.$$

А слѣдовательно

$$\frac{h}{\alpha} = \frac{f'(a + \theta\alpha)}{f'(a)}$$

и

$$\frac{k}{\beta} = \frac{f'(b + \theta\beta)}{f'(b)}.$$

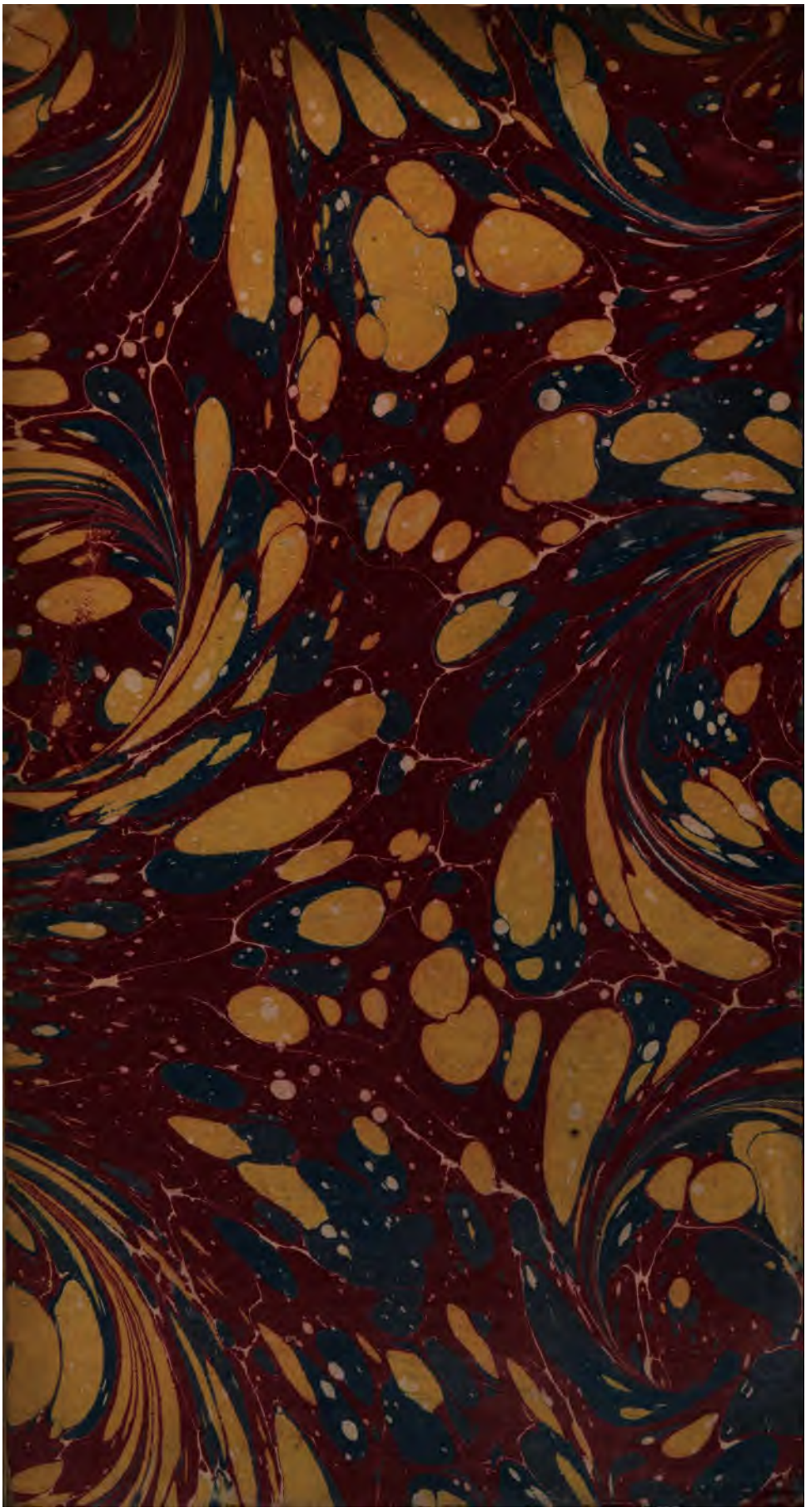
Но при условіяхъ которыя мы приняли, изъ всѣхъ значеній функціи $f'(x)$ между границами a и b самое большее будетъ $f'(b)$, самое меньшее $f'(a)$; а потому

$$\frac{k}{\alpha} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{k}{\beta} < 1.$$

(*) The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. 1859. p. 251.

Откуда очевидно, что употребляя формулу Ньютона для границы a, мы можемъ получить такое значеніе корня $a+h$, которое будетъ отстоять отъ истиннаго его значенія дальше нежели первыя границы a и b. Горнеръ замѣчаетъ, что $a+h$ будетъ составлять дѣйствительное приближеніе къ корню если h, по численному своему значенію, меньше наименьшей изъ величинъ 2α и $b-a$, ибо въ этомъ случаѣ величина $a+h$ на самомъ дѣлѣ будетъ находиться между границами a и b. И такъ для употребленія формулы Ньютона при границѣ a необходимо чтобы было

$$\frac{h}{\alpha} < 2 \quad \text{и} \quad h < b-a,$$

или

$$\frac{f'(b)}{f'(a)} \text{ не больше } 2 \text{ и } \frac{-f(a)}{f'(a)} < b-a.$$